جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة :

الطريقة الخامسة عشر : طريقة تكاملات من الأنواع $\int (\sec x)^m (\tan x)^n \, dx$

الطريقة الخامسة عشر Fifteenth method

طريقة تكاملات من الأنواع $\int (\sec x)^m (\tan x)^n dx$

هناك احتمالات عدة لقيم m و n

الاحتمال الأول : إذا كان m عدد زوجي (m : even number). وفي هذه الحالة يمكن ان يكون n فرديا او زوجيا

خطوات الحل:

1- نفصل $(\sec x)^2$.

2- نحول ما تبقى من دالة القاطع ($\sec x$) الى دالة الظل ($\tan x$) باستخدام العلاقة $(\sec x)^2 = (\tan x)^2 + 1$.

3- نفرض $du = (\sec x)^2 dx \quad \Rightarrow \quad u = \tan x$.

4- نجري عملية التكامل.

Example (61): Evaluate $I = \int (\tan x)^3 (\sec x)^2 dx$

الحل: الاس m عدد زوجي، لذلك المسالة من الاحتمال الاول من الطريقة الخامسة عشر.

$$I = \int (\tan x)^3 (\sec x)^2 dx \quad ,$$

$$\text{let } u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x)^2 dx$$

$$I = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

Example (62): Evaluate $I = \int (\tan x)^2 (\sec x)^4 dx$

الحل: الاس m عدد زوجي، لذلك المسالة من الاحتمال الاول من الطريقة الخامسة عشر.

$$I = \int (\tan x)^2 (\sec x)^4 dx = \int (\tan x)^2 (\sec x)^2 (\sec x)^2 dx = \int (\tan x)^2 (\tan^2 x + 1)(\sec x)^2 dx$$

$$I = \int (\tan^4 x + \tan^2 x)(\sec x)^2 dx$$

$$\text{let } u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x)^2 dx$$

$$I = \int (u^4 + u^2) du = \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\tan x)^5}{5} + \frac{(\tan x)^3}{3} + c$$

الاحتمال الثاني : إذا كان n عدد فردي (n : odd number). وفي هذه الحالة يمكن ان يكون m فرديا او زوجيا.

طريقة الحل:

1- نفصل $(\sec x \tan x)$.

2- نحول ما تبقى من دالة الظل ($\tan x$) الى دالة القاطع ($\sec x$) باستخدام العلاقة التالية $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

3- نفرض $du = \sec x \tan x dx \quad \Rightarrow \quad u = \sec x$.

4- نجري عملية التكامل.

Example (63): Evaluate $I = \int (\tan x)^3 (\sec x)^3 dx$

الحل: الاس n عدد فردي، لذلك المسالة من الاحتمال الثاني من الطريقة الخامسة عشر.

$$I = \int (\tan x)^2 (\sec x)^2 (\sec x \tan x) dx$$

$$I = \int (\sec^2 x - 1)(\sec x)^2 (\sec x \tan x) dx$$

$$I = \int (\sec^4 x - \sec^2 x)(\sec x \tan x) dx$$

let $\quad u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x dx$

$$I = \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\sec x)^5}{5} - \frac{(\sec x)^3}{3} + c$$

Example (64): Evaluate $I = \int (\tan x)^3 (\sec x)^4 dx$

الحل: الاس n عدد فردي، لذلك المسالة من الاحتمال الثاني من الطريقة الخامسة عشر.

$$I = \int (\tan x)^2 (\sec x)^3 (\sec x \tan x) dx$$

$$I = \int (\sec^2 x - 1)(\sec x)^3 (\sec x \tan x) dx$$

$$I = \int (\sec^5 x - \sec^3 x)(\sec x \tan x) dx$$

let $\quad u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x dx$

$$I = \int (u^5 - u^3) du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\sec x)^6}{6} - \frac{(\sec x)^4}{4} + c$$

الاحتمال الثالث : إذا كان m عدد فردي ، n عدد زوجي (m: odd number, n: even number).

طريقة الحل:

1- نحول دالة الظل ($\tan x$) الى دالة القاطع ($\sec x$) باستخدام العلاقة التالية $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

2- تصبح الدوال بدلالة القاطع فقط كل منها مرفوع لاس .

3- لاجراء عملية التكامل نستخدم القانون التالي .

$$\int (\sec x)^n dx = \frac{(\sec x)^{n-2} (\tan x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int (\sec x)^{n-2} dx$$

او تعميمه

$$\int (\sec ax)^n dx = \frac{(\sec ax)^{n-2} (\tan ax)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int (\sec ax)^{n-2} dx$$

Example (65): Evaluate $I=\int (\sec x)^3(\tan x)^2 dx$

الحل: الاس m عدد فردي ، n عدد زوجي ، لذلك المسالة من الاحتمال الثالث من الطريقة الخامسة عشر.

$$I=\int (\sec x)^3(\sec^2 x-1)dx$$

$$I=\int (\sec^5 x-\sec^3 x)dx=\int \sec^5 xdx-\int \sec^3 xdx$$

$$\int (\sec x)^n dx=\frac{(\sec x)^{n-2}(\tan x)}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int (\sec x)^{n-2} dx$$

$$\int (\sec x)^5 dx=\frac{(\sec x)^{5-2}(\tan x)}{5-1}+\frac{5-2}{5-1}\int (\sec x)^{5-2} dx=\frac{(\sec x)^3(\tan x)}{4}+\frac{3}{4}\int (\sec x)^3 dx$$

$$I=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}+\frac{3}{4}\int \sec^3 xdx-\int \sec^3 xdx$$

$$I=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}-\frac{1}{4}\int \sec^3 xdx$$

$$\int (\sec x)^3 dx=\frac{(\sec x)^{3-2}(\tan x)}{3-1}+\frac{3-2}{3-1}\int (\sec x)^{3-2} dx=\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{1}{2}\int \sec xdx$$

$$I=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{1}{2}\int \sec xdx\right)$$

$$I=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|\right)+c$$