# جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

## المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

## الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة : الطريقة السادسة عشر : طريقة تكاملات من الأنواع

$$\int (\sec x)^m (\tan x)^n dx$$

المعادلات الاعتيادية - فصل طرائق التكامل - د. عامر فاضل نصار

## الطريقة السادسة عشر Sixteenth method

### طريقة تكاملات من الأنواع $\int (\csc x)^m (\cot x)^n dx$

هناك احتمالات عدة لقيم $m$ و $n$

**الاحتمال الأول :** إذا كان $m$ عدد زوجي ( $m$ : even number ). وفي هذه الحالة يمكن ان يكون $n$ فرديا او زوجيا

**طريقة الحل:**

1- نفصل $(\csc x)^2$.

2- نحول ما تبقى من دالة القاطع تمام ( $\csc x$ ) الى دالة الظل تمام ( $\cot x$ ) باستخدام العلاقة التالية $(\csc x)^2 = (\cot x)^2 + 1$.

3- نفرض $du = -\csc^2 x dx \Rightarrow u = \cot x$.

4- نجري عملية التكامل.

**Example (66):** Evaluate $I = \int (\cot x)^3 (\csc x)^2 dx$

**الحل:** الاس $m$ عدد زوجي، لذلك المسالة من الاحتمال الاول من الطريقة السادسة عشر.

$$I = \int (\cot x)^3 (\csc x)^2 dx \quad , \quad \text{let } u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x dx$$

$$I = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + c = -\frac{(\cot x)^4}{4} + c$$

**Example (67):** Evaluate $I = \int (\cot x)^2 (\csc x)^4 dx$

**الحل:** الاس $m$ عدد زوجي، لذلك المسالة من الاحتمال الاول من الطريقة السادسة عشر.

$$I = \int (\cot x)^2 (\csc x)^4 dx = \int (\cot x)^2 (\csc x)^2 (\csc x)^2 dx = \int (\cot x)^2 (\cot^2 x + 1)(\csc x)^2 dx$$

$$I = \int (\cot^4 x + \cot^2 x)(\csc^2 x) dx$$

$$\text{let } u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x dx$$

$$I = -\int (u^4 + u^2) du = \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = -\frac{(\cot x)^5}{5} - \frac{(\cot x)^3}{3} + c$$

**الاحتمال الثاني :** إذا كان $n$ عدد فردي ( $n$ : odd number ). وفي هذه الحالة يمكن ان يكون $m$ فرديا او زوجيا.

**طريقة الحل:**

1- نفصل $(\csc x \cot x)$.

2- نحول ما تبقى من دالة الظل الى دالة القاطع باستخدام العلاقة التالية $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

3- نفرض $du = -\csc x \cot x dx \Rightarrow u = \csc x$.

4- نجري عملية التكامل.

**Example (68):** Evaluate $I=\int(\cot x)^3(\csc x)^3dx$

**الحل:** الاس $n$ عدد فردي، لذلك المسالة من الاحتمال الثاني من الطريقة السادسة عشر.

$$I=\int(\cot x)^2(\csc x)^2(\csc x\cot x)dx$$

$$I=\int(\csc^2 x-1)(\csc^2 x)(\csc x\cot x)dx$$

$$I=-\int(\csc^4 x-\csc^2 x)(-\csc x\cot x)dx$$

let $u=\csc x \quad\Rightarrow\quad du=-\csc x\cot xdx$

$$I=-\int(u^4-u^2)du=-\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}+c=-\frac{(\csc x)^5}{5}+\frac{(\csc x)^3}{3}+c$$

**Example (69):** Evaluate $I=\int(\cot x)^3(\csc x)^4dx$

**الحل:** الاس $n$ عدد فردي، لذلك المسالة من الاحتمال الثاني من الطريقة السادسة عشر.

$$I=\int(\cot x)^2(\csc x)^3(\csc x\cot x)dx$$

$$I=\int(\csc^2 x-1)(\csc x)^3(\csc x\cot x)dx$$

$$I=-\int(\csc^5 x-\csc x)^3(-\csc x\cot x)dx$$

let $u=\csc x \quad\Rightarrow\quad du=-\csc x\cot xdx$

$$I=-\int(u^5-u^3)du=-\frac{u^6}{6}+\frac{u^4}{4}+c=-\frac{(\csc x)^6}{6}+\frac{(\csc x)^4}{4}+c$$

**الاحتمال الثالث :** إذا كان $m$ عدد فردي ، $n$ عدد زوجي ( $m$: odd number, $n$: even number ).

**طريقة الحل:**

1- نحول دالة الظل تمام ( $\cot x$ ) الى دالة القاطع تمام ( $\csc x$ ) باستخدام العلاقة التالية $\cot^2 x=\csc^2 x-1$ .

2- تصبح الدوال بدلالة القاطع تمام فقط كل منها مرفوع لاس .

3- لاجراء عملية التكامل نستخدم القانون التالي .

$$\int(\csc x)^n dx=\frac{-(\csc x)^{n-2}(\cot x)}{(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int(\csc x)^{n-2}dx$$

او تعميمه

$$\int(\csc ax)^n dx=\frac{-(\csc ax)^{n-2}(\cot ax)}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int(\csc ax)^{n-2}dx$$

المعادلات الاعتيادية- فصل طرائق الكامل - د. عامر فاضل نصار

**Example (70):** Evaluate $I=\int(\csc x)^3(\cot x)^2\,dx$

**الحل:** الاس $m$ عدد فردي ، $n$ عدد زوجي ، لذلك المسالة من الاحتمال الثالث من الطريقة السادسة عشر.

$$I=\int(\csc x)^3(\csc^2 x-1)dx$$

$$I=\int(\csc^5 x-\csc^3 x)dx=\int\csc^5 xdx-\int\csc^3 xdx$$

$$\int(\csc x)^n dx=\frac{-(\csc x)^{n-2}(\cot x)}{(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int(\csc x)^{n-2}dx$$

$$\int(\csc x)^5 dx=\frac{-(\csc x)^{5-2}(\cot x)}{5-1}+\frac{5-2}{5-1}\int(\csc x)^{5-2}dx=\frac{-(\csc x)^3(\cot x)}{4}+\frac{3}{4}\int(\csc x)^3 dx$$

$$I=\frac{-\csc^3 x\cot x}{4}+\frac{3}{4}\int\csc^3 xdx-\int\csc^3 xdx$$

$$I=\frac{-\csc^3 x\cot x}{4}-\frac{1}{4}\int\csc^3 xdx$$

$$\int(\csc x)^3 dx=\frac{-(\csc x)^{3-2}(\cot x)}{3-1}+\frac{3-2}{3-1}\int(\csc x)^{3-2}dx=\frac{-\csc x\cot x}{2}+\frac{1}{2}\int\csc xdx$$

$$I=\frac{-\csc^3 x\cot x}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{-\csc x\cot x}{2}+\frac{1}{2}\int\csc xdx\right)$$

$$I=\frac{-\csc^3 x\cot x}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{-\csc x\cot x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\csc x+\cot x|\right)$$

$$I=\frac{-\csc^3 x\cot x}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{\csc x\cot x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\csc x+\cot x|\right)$$

المعادلات الاعتيادية ـ فصل طرائق التكامل ـ د. عامر فاضل نصار