جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة :

الطريقة الخامسة : القسمة الطويلة

المعادلات الاعتيادية - فصل طرائق التكامل - د. عامر فاضل نصار

الطريقة الخامسة Fifth Method

طريقة القسمة الطويلة Long Division method

تستخدم هذه الطريقة في تكامل الدوال النسبية (الكسرية)، إذا كان كل من المقام والبسط متعدد الحدود وكانت درجة البسط اكبر أو يساوي درجة المقام (الدالة الكسرية في هذه الحالة تسمى نسبية غير فعلية) فعملية القسمة الطويلة تحول الدالة الكسرية التي لا نستطيع أن نكاملها إلى مقادير أسهل يمكن تكاملها، فعملية قسمة كثير الحدود على أخرى تشبه إلى حد بعيد عملية قسمة رقم على آخر. هناك طريقتان لتقسيم كثيرات الحدود ولكننا سنركز على الطريقة الأكثر شيوعًا هنا: الطريقة الجبرية الطويلة أو ببساطة الطريقة التقليدية لقسمة التعبير الجبري.

فيما يلي خطوات قسمة كثيرات الحدود باستخدام طريقة القسمة المطولة:

1- نرتب الدالة كثير الحدود ترتيبًا تنازليًا. نستبدل الحد (الحدود) المفقودة بـ 0.

2- نقسم الحد الأول من المقسوم (كثير الحدود المراد تقسيمه dividend) على الحد الأول للمقسوم عليه (divisor). هذا يعطي الحد الأول من حاصل القسمة (quotient).

3- اضرب المقسوم عليه في الحد الأول من حاصل القسمة.

4- اطرح حاصل الضرب من المقسوم ثم أنزل الحد التالي. سيكون الفرق والحد التالي هو العائد الجديد.

ملاحظة: تذكر قاعدة الطرح "قم بتغيير علامة المطروح ثم انتقل إلى الجمع".

5- كرر الخطوة 2-4 لإيجاد الحد الثاني من حاصل القسمة.

6- استمر في العملية حتى يتم الحصول على الباقي (remainder) . يمكن أن يكون هذا صفرًا أو أقل من المقسوم عليه.

إذا كان المقسوم عليه أحد عوامل المقسوم ، فستحصل على الباقي يساوي صفرًا. إذا لم يكن المقسوم عليه عاملاً من عوامل المقسوم ، فستحصل على الباقي الذي درجته أقل من درجة المقسوم عليه.

التعبير عن القسمة الجبرية الطويلة ، يمكن كتابته باحدى الطريقتين:

(1) **dividend = (divisor) (quotient) + remainder**

المقسوم = (المقسوم عليه) * (حاصل القسمة) + الباقي

(2) $$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}} = \text{quotient} + \frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{حاصل القسمة} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

Example (21): Evaluate $\int \frac{x^3+6x^2+12+13x}{x+3}dx$

1-	ترتيب الدوال ترتيبا تنازليا	$\frac{x^3+6x^2+12+13x}{x+3}=\frac{x^3+6x^2+13x+12}{x+3}$
2-	نقسم الحد الاول من المقسوم x^3 على الحد الاول من المقسوم عليه x للحصول على الحد الاول من حاصل القسمة ، x^2	$x+3\overline{)\,x^3+6x^2+13x+12}\quad x^2$
3-	نضرب المقسوم عليه $(x+3)$ بـالحد الاول من حاصل القسمة x^2	$x+3\overline{)\,x^3+6x^2+13x+12}\quad x^2$ subtract: x^3+3x^2
4-	ينزل الحد التالي، $13x$	$x+3\overline{)\,x^3+6x^2+13x+12}\quad x^2$ subtract: x^3+3x^2 $3x^2+13x$
5-	نقسم $3x^2$ على x للحصول على الحد الثاني من حاصل القسمة ، $3x$ نضرب $(x+3)$ بـ $3x$ ينزل الحد التالي، 12	$x+3\overline{)\,x^3+6x^2+13x+12}\quad x^2+3x$ subtract: x^3+3x^2 $3x^2+13x$ subtract: $3x^2+9x$ $4x+12$
6-	نقسم $4x$ على x للحصول على الحد الثالث من حاصل القسمة ، 4 نضرب $(x+3)$ بـ 4	$x+3\overline{)\,x^3+6x^2+13x+12}\quad x^2+3x+4$ subtract: x^3+3x^2 $3x^2+13x$ subtract: $3x^2+9x$ $4x+12$ subtract: $4x+12$ 0

$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}}=\text{quotient}+\frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}}=\text{حاصل القسمة}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$\frac{x^3+6x^2+12+13x}{x+3}=\frac{x^3+6x^2+13x+12}{x+3}=x^2+3x+4+\frac{0}{x+3}=x^2+3x+4$$

$$\int\frac{x^3+6x^2+13x+12}{x+3}dx=\int(x^2+3x+4)dx=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x+c$$

Example (22): Evaluate $\int \frac{x^4-23x^3+49x+4}{x^2+x-2}dx$

1-	ترتيب الدوال ترتيبا تنازليا، ونستبدل الحد المفقودة بـ 0.	$\frac{x^4-23x^3+49x+4}{x^2+x-2}=\frac{x^4-23x^3+0x^2+49x+4}{x^2+x-2}$
2-	نقسم الحد الاول من المقسوم x^4 على الحد الاول من المقسوم عليه x^2 للحصول على الحد الاول من حاصل القسمة ، x^2	$x^2+x-2 \;\overline{)\; x^4-23x^3+0+49x+4}$ x^2
3-	نضرب المقسوم عليه (x^2+x-2) بالحد الاول من حاصل القسمة x^2	$x^2+x-2 \;\overline{)\; x^4-23x^3+0+49x+4}$ x^2 subtract: $x^4+x^3-2x^2$ $-24x^3+2x^2$
4-	ينزل الحد التالي، $49x$	$x^2+x-2 \;\overline{)\; x^4-23x^3+0+49x+4}$ x^2 subtract: $x^4+x^3-2x^2$ $-24x^3+2x^2+49x$
5-	نقسم $-24x^3$ على x^2 للحصول على الحد الثاني من حاصل القسمة ، $-24x$ نضرب (x^2+x-2) بـ $-24x$ ينزل الحد التالي، 4	$x^2+x-2 \;\overline{)\; x^4-23x^3+0+49x+4}$ x^2-24x subtract: $x^4+x^3-2x^2$ $-24x^3+2x^2+49x$ subtract: $-24x^3-24x^2+48x$ $26x^2+x+4$
6-	نقسم $6x^2$ على x^2 للحصول على الحد الثالث من حاصل القسمة ، 26 نضرب (x^2+x-2)	$x^2+x-2 \;\overline{)\; x^4-23x^3+0+49x+4}$ $x^2-24x+26$ subtract: $x^4+x^3-2x^2$ $-24x^3+2x^2+49x$ subtract: $-24x^3-24x^2+48x$ $26x^2+x+4$ subtract: $26x^2+26x-52$ $-25x+56$

في هذا المثال الباقي (remainder) هو $-25x+56$

$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}}=\text{quotient}+\frac{\text{remainder}}{\text{divisor}} \qquad \frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}}=\text{حاصل القسمة}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$\frac{x^4-23x^3+49x+4}{x^2+x-2}=\frac{x^4-23x^3+0x^2+49x+4}{x^2+x-2}=x^2-24x+26+\frac{-25x+56}{x^2+x-2}$$

$$\int \frac{x^4-23x^3+49x+4}{x^2+x-2}dx=\int (x^2-24x+26+\frac{-25x+56}{x^2+x-2})dx \quad =\int (x^2-24x+26-\frac{25x-56}{x^2+x-2})dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-12x^2+26x-\int \frac{25x-56}{x^2+x-2}dx$$

الجزء الاخير واجب على الطالب

Example (23): Evaluate $\int \frac{6x^3-11x^2-4x+5}{2x-1}dx$

1-	نقسم $6x^3$ على $2x$ للحصول على الحد الاول من حاصل القسمة ، $3x^2$ / نضرب $(2x-1)$ بـ $3x^2$ ينزل الحد التالي، $-4x$	$3x^2$ $2x-1 \;\overline{)\; 6x^3-11x^2-4x+5}$ *subtract:* $6x^3-3x^2$ $-8x^2-4x$
2-	نقسم $-8x^2$ على $2x$ للحصول على الحد الثاني من حاصل القسمة ، $-4x$ / نضرب $(2x-1)$ بـ $-4x$ ينزل الحد التالي، 5	$3x^2-4x$ $2x-1 \;\overline{)\; 6x^3-11x^2-4x+5}$ *subtract:* $6x^3-3x^2$ $-8x^2-4x$ *subtract:* $-8x^2+4x$ $-8x+5$
3-	نقسم $-8x$ على $2x$ للحصول على الحد الثالث من حاصل القسمة ، -4 نضرب $(2x-1)$ بـ -4	$3x^2-4x-4$ $2x-1 \;\overline{)\; 6x^3-11x^2-4x+5}$ *subtract:* $6x^3-3x^2$ $-8x^2-4x$ *subtract:* $-8x^2+4x$ $-8x+5$ *subtract:* $-8x+4$ 1

في هذا المثال الباقي هو 1

$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}}=\text{quotient}+\frac{\text{remainder}}{\text{divisor}} \qquad \frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}}=\text{حاصل القسمة}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$\frac{6x^3-11x^2-4x+5}{2x-1}=3x^2-4x-4+\frac{1}{2x-1}$$

$$\int \frac{6x^3-11x^2-4x+5}{2x-1}dx=x^3-2x^2-4x+\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx=x^3-2x^2-4x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)+c$$

Exercise (3): By Long Division method evaluate the integrals.

No.	Question $\int f(x)dx$	Answer

1	$\int \frac{x^3-4x^2+2x+5}{x-2}dx$	$f(x)=x^2-2x-2+\frac{1}{x-2}$
2	$\int \frac{2x^3+4x^2-5}{x+3}dx$	$f(x)=2x^2-2x+6-\frac{23}{x+3}$
3	$\int \frac{12x^3-11x^2+9x+18}{4x+3}dx$	$f(x)=3x^2-5x+6$
4	$\int \frac{x^3-3x^2-x-3}{x^2-4x+1}dx$	$f(x)=x+1+\frac{2x-4}{x^2-4x+1}$
5	$\int \frac{2x^2-5x-1}{x-3}dx$	$f(x)=2x+1+\frac{2}{x-3}$
6	$\int \frac{x^6+2x^4+6x-9}{x^3+3}dx$	$f(x)=x^3+2x-3$
7	$\int \frac{3x^4-5x^2+3}{x+2}dx$	$f(x)=3x^3-6x^2+7x-14+\frac{31}{x+2}$
8	$\int \frac{x^3+2x^2-3x+4}{x-7}dx$	$f(x)=x^2+9x+60+\frac{424}{x-7}$
9	$\int \frac{2x^5+x^4-6x+9}{x^2-3x+1}dx$	$f(x)=2x^3+7x^2+19x+50+\frac{125x-41}{x^2-3x+1}$
10	$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x+9}dx$	$f(x)=x^2-8x+73-\frac{656}{x+9}$
11	$\int \frac{7x^3-1}{x+2}dx$	$f(x)=7x^2-14x+28-\frac{57}{x+2}$
12	$\int \frac{5x^4+x^2-8x+2}{x-4}dx$	$f(x)=5x^3+20x^2+81x+316+\frac{1266}{x-4}$