جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة :

الطريقة السادسة : طريقة التكامل بتجزئة الكسور

الطريقة السادسة Sixth Method

طريقة التكامل بتجزئة الكسور Integration by Partial Fractions

تستخدم هذه الطريقة في تكامل الدوال النسبية (الكسرية)، إذا كان كل من المقام والبسط متعدد الحدود وكانت درجة البسط اقل من درجة المقام (الدالة الكسرية في هذه الحالة تسمى نسبية فعلية) وتعتمد هذه الطريقة إلى إمكانية تحليل المقام إلى عوامله الأولية (سواء كانت من الدرجة الأولى أو الثانية) و بعد تحليل المقام هناك عدة حالات منها

الحالة الأولى : إذا كان المقام يتحلل إلى عوامل خطية مختلفة : إذا كانت $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالة نسبية وتم تحليل المقام إلى عواملها الأولية الخطية غير المكررة $g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ فان

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\dots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

Example (24): Evaluate $I=\int\frac{20x+16}{x^2+3x+2}dx$ ....(*)

خطوات الحل

- نحلل المقام $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=0$

بما إن العوامل خطية ومختلفة فهي الحالة الأولى

- نجزئ المقام إلى عدة كسور بالاعتماد على تحليل المقام

$$\frac{20x+16}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}\quad\text{...}(*1)$$

- نوحد مقامات الطرف الأيمن

$$\frac{20x+16}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx+2B}{(x+2)(x+1)}$$
$$=\frac{(A+B)x+A+2B}{(x+2)(x+1)}$$

- نساوي بين معاملات قوى x في الطرفين الأيمن و الأيسر

$A+B=20$ ....(*2)

$A+2B=16$ ....(*3)

- نحل (*2) و (*3) لإيجاد قيم A و B

$$\left.\begin{aligned}\mp A\mp B&=\mp 20\\ A+2B&=16\end{aligned}\right\}\begin{aligned}B&=-4\\ A&=24\end{aligned}$$

- نعوض قيم A و B في $(*1)$ فينتج

$$\frac{20x+16}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}=\frac{24}{x+2}-\frac{4}{x+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*4)$$

- نجري عملية التكامل

$$I=\int\frac{20x+16}{x^2+3x+2}dx=\int\left(\frac{24}{x+2}-\frac{4}{x+1}\right)dx=24\ln(x+2)-4\ln(x+1)+c$$

الحالة الثانية : إذا كان المقام يتحلل إلى عوامل خطية مكررة : إذا كانت $\frac{f(x)}{g(x)}$ دالة نسبية وتم تحليل المقام إلى عواملها الأولية الخطية المكررة $g(x)=(x-a)(x-a)\ldots(x-a)=(x-a)^n$ فان

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Example (25): Evaluate $I=\int\frac{x}{x^2+2x+1}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$

$$x^2+2x+1=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$$

بما إن العوامل خطية ومكررة فهي الحالة الثانية

$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*1)$$

$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}=\frac{Ax+A+B}{(x+1)(x+1)^2}$$

$$A=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*2)$$

$$A+B=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*3)$$

نحل $(*2)$ و $(*3)$ لإيجاد قيم B

$$1+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-1$$

نعوض قيم A و B في $(*1)$ فينتج

$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*4)$$

نجري عملية التكامل

$$I=\int\frac{x}{x^2+2x+1}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\ln(x+1)-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c$$

الحالة الثالثة : إذا كان المقام يتحلل إلى عوامل خطية قسم منها مكرر وقسم منها غير مكرر: إذا كانت

$\frac{f(x)}{g(x)}$ دالة نسبية وتم تحليل دالة المقام إلى عوامل خطية قسم منها مكرر وقسم منها غير مكرر

$g(x)=(x-a)(x-b)^n$ فان

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(x-b)^n}$$

Example (26): Evaluate $I=\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ ....(*)

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1)$$

بما إن المقام تحلل إلى عوامل خطية مكررة وأخرى غير مكررة فهي الحالة الثالثة

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \quad \ldots\ldots(*1)$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-B+Cx+C}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A+C)x+A-B+C}{(x+1)(x-1)^2}$$

$A+B=0$ ....(*2)

$-2A+C=3$ ....(*3)

$A-B+C=5$ ....(*4)

نحل (*2) و (*3) و (*4) لإيجاد قيم A و B و C

$$\left.\begin{array}{r}A+B=0\\-2A+C=3\\A-B+C=5\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{c}B=-A\\-2A+C=3\\2A+C=5\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{c}B=-A\\-2A+4=3\\C=4\end{array}\right\}\quad\begin{array}{c}B=-1/2\\A=1/2\\C=4\end{array}$$

نعوض قيم A و B و C في (*1) فينتج

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{1/2}{x+1}+\frac{-1/2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2} \quad \ldots\ldots(*4)$$

نجري عملية التكامل

$$I=\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{1/2}{x+1}+\frac{-1/2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+4\int(x-1)^{-2}dx=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+4\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{4}{x-1}+c$$

الحالة الرابعة : إذا كان المقام يتحلل إلى عوامل خطية وأخرى من الدرجة الثانية : إذا كانت $\frac{f(x)}{g(x)}$ دالة نسبية وتم تحليل دالة المقام إلى عوامل خطية وعوامل أخرى من الدرجة الثانية فان $g(x)=(x-a)(bx^2+cx+d)$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{bx^2+cx+d}$$

أي ان الكسر الذي مقامه من الدرجة الاولى يكون بسطه ثابت والكسر الذي مقامه من الدرجة الثانية يكون بسطه من الدرجة الاولى

Example (27): Evaluate $I=\int\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x^2+5)}dx$ ....(*)

المقام تحلل إلى عوامل خطية وأخرى من الدرجة الثانية فهي الحالة الرابعة من الطريقة الخامسة

$$\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x^2+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+5} \quad \ldots\ldots(*1)$$

$$=\frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+5)}$$

$$=\frac{Ax^2+5A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x+2)(x^2+5)}=\frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+5A+2C}{(x+2)(x^2+5)}$$

$A+B=1$ ....(*2)

$2B+C=-5$ ....(*3)

$5A+2C=4$ ....(*4)

نحل (*2) و (*3) و (*4) لإيجاد قيم A و B و C

$$\left.\begin{matrix}A+B=1\\2B+C=-5\\5A+2C=4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}B=1-A\\2(1-A)+C=-5\\5A+2C=4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}B=1-A\\-2A+C=-7\\5A+2C=4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}B=1-A\\-4A+2C=-14\\5A+2C=4\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}B=-1\\A=2\\C=-3\end{matrix}\right\}$$

نعوض قيم A و B و C في (*1) فينتج

$$\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x^2+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{2}{x+2}+\frac{-x-3}{x^2+5}=\frac{2}{x+2}-\frac{x}{x^2+5}-\frac{3}{x^2+5} \quad \ldots(*4)$$

$$I=\int\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x^2+5)}dx=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{x}{x^2+5}-\frac{3}{x^2+5}\right)dx$$

$$=2\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x^2+5)-\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

الحالة الخامســة : إذا كان المقام يتحلل إلى عوامل من الدرجة الثانية مكررة : إذا كانت $\frac{f(x)}{g(x)}$ دالة نســبية

وتم تحليل دالة المقام إلى عوامل من الدرجة الثانية مكررة $g(x)=(ax^2+bx+c)^n$ فان

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Example (28): Evaluate $I=\int\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx$ ....(*)

المقام تحلل إلى عوامل من الدرجة الثانية مكررة فهي الحالة الخامسة من الطريقة الخامسة

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*1)$$

$$\vdots$$

$$A=0, B=1, C=2, D=0$$

نعوض قيم A و B و C و D في $(*1)$ فينتج

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}+(x^2+1)^{-2}(2x)$$

ملاحظة مهمة : إذا كان المقام (x^n) فان $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{x^n}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\ldots+\frac{C}{x^n}$

طريقة Heaviside للعوامل الخطية

بواسطة طريقة أوليفر هيفيساید (1850-1925) يمكننا إيجاد المعاملات $A, B, C, \ldots$ في تجزئة الكسور ، عندما تكون درجة كثير الحدود $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ و $g(x)=(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$ هي ناتجة عن n العوامل الخطية، كل منها مرفوع إلى القوة الأولى ، هناك طريقة سريعة للتوسيع عن طريق الكسور الجزئية.

Example (29): Find $A, B,$ and C

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

الحل: إذا ضربنا طرفي المعادلة $(*)$ في $(x-1)$ نحصل على

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)}=A+\frac{B(x-1)}{x-2}+\frac{C(x-1)}{x-3}$$

نضع $x=1$ ، تعطي المعادلة الناتجة قيمة A

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A+0+0 \qquad \Rightarrow \qquad A=1$$

وبالتالي ، فإن قيمة A هي الرقم الذي كنا سنحصل عليه إذا غطينا (**cover**) العامل (x-1) في مقام الكسر الأصلي

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \qquad \text{..............................}(*1)$$

ونحسب قيمة المقدار الباقي عند $x = 1$

$$A = \frac{(1)^2+1}{\underset{\underset{\text{Cover}}{\Uparrow}}{\boxed{(x-1)}}\,(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$

وبالمثل ، نجد قيمة B في المعادلة (*) من خلال تغطية (**cover**) العامل (x-2) في (*1) ونحسب قيمة المقدار الباقي عند $x = 2$

$$B = \frac{(2)^2+1}{(2-1)\,\underset{\underset{\text{Cover}}{\Uparrow}}{\boxed{(x-2)}}\,(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$

أخيرًا ، نجد قيمة C من خلال تغطية (x-3) في (*1) ونحسب قيمة المقدار الباقي عند $x = 3$

$$C = \frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)\,\underset{\underset{\text{Cover}}{\Uparrow}}{\boxed{(x-3)}}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5.$$

طريقة **Heaviside**

(1) اكتب حاصل القسمة مع تحليل $g(x)$ إلى عواملها الاولية كتالي

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-r_n)}$$

(2) نغطي العامل $(x-r_i)$ من عوامل $g(x)$ ونحسب قيمة المقدار الباقي عند $(x=r_i)$ وهذا سيجد قيمة A_i

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\ldots(r_1-r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)\ldots(r_2-r_n)}$$

Example (30): Evaluate (Heaviside Method) $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}dx$

الحل: درجة البسط $f(x)=x+4$ اقا من درجة المقام $g(x)=x^3+3x^2-10x$ وتحليل المقام يكون بالشكل التالي

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}=\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+5}$$

$r_1 = 0,\quad r_2 = 2,\quad r_3 = -5$

$$A_1=\frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\dots(r_1-r_n)}=\frac{f(0)}{(0-2)(0+5)}=\frac{0+4}{(-2)(5)}=\frac{4}{-10}=\frac{-2}{5}$$

$$A_2=\frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)\dots(r_2-r_n)}=\frac{f(2)}{2(2+5)}=\frac{2+4}{2(2+5)}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

$$A_3=\frac{f(r_3)}{(r_3-r_1)\dots(r_3-r_n)}=\frac{f(-5)}{-5(-5-2)}=\frac{-5+4}{-5(-7)}=\frac{-1}{35}$$

لذلك

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}=\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}=\frac{-2/5}{x}+\frac{3/7}{(x-2)}+\frac{-1/35}{(x+5)}$$

و

$$\int\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}=\frac{-2}{5}\ln x+\frac{3}{7}\ln(x-2)-\frac{1}{35}\ln(x+5)$$

طرائق أخرى لتحديد المعاملات

طريقة أخرى لتحديد الثوابت التي تظهر في الكسور الجزئية هي طريقة الاشتقاق ، كما في المثال التالي.

Example (31): Find A, B, C

$$\frac{x-1}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(*)$$

بازالة الكسور وإشتقاق النتيجة والتعويض بـ $x = -1$

الحل: نقوم أولاً بازالة الكسور:

$$x-1=A(x+1)^2+B(x+1)+C\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(*1)$$

نعوض $x=-1$ في $(*1)$ فيكون $C=-2$

نشتق طرفي المعادلة $(*1)$ بالنسبة إلى x فنحصل على

$$1=2A(x+1)+B\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(*2)$$

نعوض $x=-1$ في $(*2)$ فيكون $B=1$

نشتق طرفي المعادلة $(*2)$ بالنسبة إلى x فنحصل على

$$\frac{x-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3} \qquad \Rightarrow \qquad A=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2A=0$$

في بعض المسائل، يوفر تعيين قيم صغيرة لـ x ، مثل $x=0,\pm1,\pm2$ للحصول على المعادلات في A و B و C بديلاً سريعًا للطرق الأخرى

Example (32): Find A, B, C

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

بتخصيص قيم عددية لـ x.

الحل: نقوم أولاً بازالة الكسور وذلك بضرب $(*)$ بـ $(x-1)(x-2)(x-3)$ فينتج

$$x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*1)$$

في العلاقة $(*1)$ نعوض القيم التالية

$x=1 \quad \Rightarrow \quad A=1$

$x=2 \quad \Rightarrow \quad B=-5$

$$x=3 \quad \Rightarrow \quad C=5 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-5}{x-2}+\frac{5}{x-3}$$

Exercise (4-1): By partial fractions evaluate the integrals **Exe. (2-12) page 395 blue book**

No.	Question	Answer
1	$\int \frac{dx}{x^2-4}$	$I=\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{1}{4}\ln(x+2)+c$ $I=-\frac{1}{a}\tanh^{-1}(\frac{x}{a})=-\frac{1}{2}\tanh^{-1}(\frac{x}{2})+c$
2	$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$	$I=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tanh^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$
3	$\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$	$I=\ln(x+2)-\ln(x+3)+c$
4	$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x+\cos x-2}$	$I=\frac{2}{3}\tanh^{-1}(2\cos x-1)+\frac{2}{3}\tanh^{-1}(\cos x+1)+c$ $I=\frac{2}{3}\tanh^{-1}\left(\frac{2\cos x}{3}+\frac{1}{3}\right)+c$ $I=\frac{1}{3}\ln(\cos x+2)-\frac{1}{3}\ln(\cos x-1)+c$

5	$\int \frac{xdx}{x^2-3x-4}$	$I=\frac{1}{5}\ln(x+1)+\frac{4}{5}\ln(x-4)+c$
6	$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$	$I=\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2})+c$
7	$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$	$I=2\ln(x+1)+3\ln(x-3)+c$
8	$\int \frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2}dx$	$I=\ln(x)-\frac{2}{x}+3\ln(x+1)+c$
9	$\int \frac{xdx}{x^2+4x-5}$	$I=\frac{1}{6}\ln(x-1)+\frac{5}{6}\ln(x+5)+c$
10	$\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx$	$I=\frac{1}{2}\ln(x)-\ln(x-1)+\frac{3}{2}\ln(x+2)+c$
11	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx$	$I=\ln(x+1)+c$
12	$\int \frac{x^2}{x(x^2+1)^2}dx$	$I=2\ln x-2\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+c$
13	$\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx$	$I=x-\ln(x^2+2x+1)-\frac{1}{x+1}+c$
14	$\int \frac{2}{x(x^2+1)^2}dx$	$I=\frac{-2}{x}-3\tan^{-1}x+\frac{x}{1+x^2}+c$
15	$\int \frac{x^3+1}{x-1}dx$	$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln(x-1)+c$
16	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+3e^x+2}$	$I=\ln(1+e^{-x})-\ln(1+2e^{-x})+c$ $I=\ln(e^x+1)-\ln(e^x+2)+c$
17	$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$	$I=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\ln(x-2)+\frac{1}{2}\ln(x-2)+c$
18	$\int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}dx$	$I=x-3\tan^{-1}x+\frac{x}{1+x^2}+c$
19	$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$	$I=\ln x-\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$
20	$\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$	$I=\frac{-x^2}{2}-3x+6\ln(1-x)+\frac{20}{1-x}-\frac{23}{2(1-x)^2}+c$
21	$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$	$I=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$
22	$\int \frac{(x^3+x^2-5x+15)dx}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}$	$I=-\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+5\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

23	$\int \frac{x^3}{(1-x)^3}dx$	$I=-x-3\ln\|1-x\|-\frac{3}{1-x}+\frac{1}{-2(1-x)^2}+c$
24	$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$	$I=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{4}\tan^{-1}x+\int \frac{-7/4}{(x^2+1)^2}dx$

Exercise (4-2): By partial fractions evaluate the integrals Exe. (36) page-305 – al-samarrai

No.	Question	Answer
1	$\int \frac{dx}{x^2-9}$	$I=\frac{1}{6}\ln(x-3)-\frac{1}{6}\ln(x+3)+c$
2	$\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$	$I=\frac{1}{5}\ln(x+1)-\frac{1}{5}\ln(x+6)+c$
3	$\int \frac{2x^3+3x^2-2}{2x^2+3x+1}dx$	$I=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\ln(2x+1)+\ln(x+1)+c$
4	$\int \frac{(x+2)dx}{(2x+1)(x+1)}$	$I=\frac{3}{2}\ln(2x+1)-\ln(x+1)+c$
5	$\int \frac{dx}{x^2+6x+5}$	$I=\frac{1}{6}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+5)+c$
6	$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$	$I=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c$
7	$\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x+2)^2}$	$I=\ln(x+1)+4\frac{1}{x+2}+c$
8	$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$	$I=2\ln(x+1)+2\ln(x-1)-\frac{4}{x-1}+c$
9	$\int \frac{(x^3+x^2+x+2)dx}{x^4+3x^2+2}$	$I=\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+c$
10	$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+1)}$	$I=\ln x-\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$
11	$\int \frac{(6x^2-x+13)dx}{(x+1)(x^2+1)}$	$I=4\ln(x+1)+\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2})+c$
12	$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$	$I=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{x}{2(1+x^2)}+c$
13	$\int \frac{2x^4+3}{(x^2+1)^2}dx$	$I=2x-4\tan^{-1}x-5\frac{1}{x^2+1}$
14	$\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx$	$I=\ln\|x^2+4\|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{4}{x^2+4}+c$

15	$\int \frac{dx}{x^4+1}$	$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left[(x-\frac{1}{x})/\sqrt{2}\right]-\frac{1}{2\sqrt{2}}\tanh^{-1}\left[(x+\frac{1}{x})/\sqrt{2}\right]+c$
16	$\int \frac{xdx}{x^4+1}$	$I=\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+c$
17	$\int \frac{x^2dx}{x^4+1}$	$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left[(x-\frac{1}{x})/\sqrt{2}\right]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\tanh^{-1}\left[(x+\frac{1}{x})/\sqrt{2}\right]+c$
18	$\int \frac{x^3dx}{x^4+1}$	$I=x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|-\tan^{-1}x\right)+c$

Exercise (4-3):

Exe. (8.4) page 461 calculus-12

No.	Question	Answer
	Expanding Quotients into Partial Fractions Expand the quotients in Exercises 1-8 by partial fractions.	
1	$\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$	$=\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x-2}$
2	$\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$	$=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-1}$
3	$\frac{x+4}{(x+1)^2}$	$=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$
4	$\frac{2x+2}{x^2-2x+1}$	$=\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$
5	$\frac{z+1}{z^2(z-1)}$	$=\frac{-2}{z}+\frac{-1}{z^2}+\frac{2}{z-1}$
6	$\frac{z}{z^3-z^2-6z}$	$=\frac{1/5}{z-3}+\frac{-1/5}{z+2}$
7	$\frac{t^2+8}{t^2-5t+6}$	$=1+\frac{17}{t-3}+\frac{-12}{t-2}$
8	$\frac{t^4+9}{t^4+9t^2}$	$=1+\frac{1}{t^2}+\frac{-10}{t^2+9}$
	Nonrepeated Linear Factors In Exercises 9-16, express the integrand as a sum of partial fractions and evaluate the integrals.	
9	$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$I=\frac{1}{2}\left[\ln\|1+x\|-\ln\|1-x\|\right]+c$
10	$\int \frac{dx}{x^2+2x}$	$I=\frac{1}{2}\left[\ln\|x\|-\ln\|x+2\|\right]+c$
11	$\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}dx$	$I=\frac{2}{7}\ln\|x+6\|+\frac{5}{7}\ln\|x-1\|+c$

12	$\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}dx$	$I = 9\ln\lvert x-4\rvert - 7\ln\lvert x-3\rvert + c$
13	$\int_4^8 \frac{ydy}{y^2-2y-3}$	$I = \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{\ln 15}{2}$
14	$\int_{1/2}^1 \frac{(y+4)dy}{y^2+y}$	$I = \ln\frac{1}{8} - \ln\frac{1}{16} + \ln\frac{27}{8} = \ln(\frac{1}{8}\cdot\frac{27}{8}\cdot\frac{16}{1}) = \ln(\frac{27}{4})$
15	$\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$	$I = \frac{-1}{2}\ln\lvert t\rvert + \frac{1}{6}\ln\lvert t+2\rvert + \frac{1}{3}\ln\lvert t-1\rvert + c$
16	$\int \frac{x+3}{2x^3-8x}dx$	$I = \frac{-3}{8}\ln\lvert x\rvert + \frac{1}{16}\ln\lvert x+2\rvert + + \frac{5}{16}\ln\lvert x-2\rvert + c$

Repeated Linear Factors

In Exercises 17-20, express the integrand as a sum of partial fractions and evaluate the integrals.

17	$\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$	$I = 3\ln 2 - 2$
18	$\int_{-1}^0 \frac{x^3dx}{x^2-2x+1}$	$I = 2 - 3\ln 2$
19	$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$	$I = \frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert - \frac{x}{2(x^2-1)} + c$
20	$\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$	$I = \frac{1}{4}\ln\lvert x-1\rvert + \frac{3}{4}\ln\lvert x+1\rvert + \frac{1}{2(x+1)} + c$

Irreducible Quadratic Factors

In Exercises 21-32, express the integrand as a sum of partial fractions and evaluate the integrals.

21	$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$	$I = \frac{\pi + 2\ln 2}{8}$
22	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt$	$I = \ln\frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{12}$
23	$\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}dy$	$I = \tan^{-1} y - \frac{1}{y^2+1} + c$
24	$\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}dx$	$I = \tan^{-1} 2x - \frac{1}{4x^2+1} + c$
25	$\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}ds$	$I = -(s-1)^{-2} + (s-1)^{-1} + \tan^{-1} s + c$
26	$\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}ds$	$I = \ln\lvert s\rvert + \frac{9}{s^2+9} + c$

27	$\int \frac{x^2-x+2}{x^3-1}dx$	$I=\frac{2}{3}\ln\lvert x-1\rvert+\frac{1}{6}\ln\lvert x^2+x+1\rvert-\sqrt{3}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c$
28	$\int \frac{1}{x^4+x}dx$	$I=\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{3}\ln\lvert x+1\rvert-\frac{1}{3}\ln\lvert x^2-x+1\rvert+c$
29	$\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$	$I=\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$
30	$\int \frac{x^2+x}{x^4-3x^2-4}dx$	$I=\frac{3}{10}\ln\lvert x-2\rvert-\frac{1}{10}\ln\lvert x+2\rvert-\frac{1}{10}\ln\lvert x^2+1\rvert+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+c$
31	$\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}d\theta$	$I=\frac{-1}{\theta^2+2\theta+2}+\ln(\theta^2+2\theta+2)-\tan^{-1}(\theta+1)+c$
32	$\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}d\theta$	$I=\tan^{-1}(\theta)+2(\theta^2+1)^{-1}-\frac{1}{4}(\theta^2+1)^{-2}+c$

Improper Fractions

In Exercises 33-38, perform long division on the integrand, write the proper fraction as a sum. of partial fractions, and then evaluate the integral.

33	$\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$	$I=x^2+\ln\left\lvert\frac{x-1}{x}\right\rvert+c$
34	$\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$	$I=\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+c$
35	$\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}dx$	$I=9x+2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}+7\ln\lvert x-1\rvert+c$
36	$\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}dx$	$I=2x^2+4x+3\ln\lvert 2x-1\rvert-(2x-1)^{-1}+c$
37	$\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}dy$	$I=\frac{y^2}{2}-\ln\lvert y\rvert+\frac{1}{2}\ln\lvert 1+y^2\rvert+c$
38	$\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}dy$	$I=y^2+2y+\ln\lvert y-1\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert y^2+1\rvert-\tan^{-1}y+c$

Evaluating Integrals

Evaluate the integrals in Exercises 39-50.

39	$\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}dt$	$I=\ln\left(\frac{e^t+1}{e^t+2}\right)+c$
40	$\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}dt$	$I=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+1)-\tan^{-1}(e^t)+c$
41	$\int \frac{\cos y dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$	$I=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{\sin y-2}{\sin y+3}\right)+c$
42	$\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}d\theta$	$I=\frac{-1}{3}\ln\left(\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+2}\right)+c$
43	$\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}dx$	$I=\frac{(\tan^{-1}2x)^2}{4}-3\ln\lvert x-2\rvert+\frac{6}{x-2}+c$

44	$\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}dx$	$I=\frac{(\tan^{-1}3x)^2}{6}+\ln\|x+1\|+\frac{1}{x+1}+c$
45	$\int \frac{1}{x^{3/2}-x^{1/2}}dx$	$I=\ln\left\|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right\|+c$
46	$\int \frac{dx}{(x^{1/3}-1)x^{1/2}}$ **(Hint let** $u=x^6$**)**	$I=6x^{1/6}+3\ln\left\|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right\|+c$
47	$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ **(Hint let** $u^2=x+1$**)**	$I=2\sqrt{x+1}+\ln\left\|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right\|+c$
48	$\int \frac{1}{x\sqrt{x+9}}dx$	$I=\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right\|+c$
49	$\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$ **(Hint multiply by** $\frac{x^3}{x^3}$**)**	$I=\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{x^4}{x^4+1}\right\|+c$
50	$\int \frac{dx}{x^6(x^5+4)}$	$I=\frac{1}{80}\ln\left\|\frac{x^5+4}{x^5}\right\|-\frac{1}{20x^5}+c$