جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة :

الطريقة السابعة : التكامل بالاجزاء

الطريقة السابعة Seventh Method

طريقة التكامل بالأجزاء (طريقة udv) Integration by Part

هذه الطريقة مبنية على حاصل ضرب دالتين

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

نلاحظ ان القانون يعبر عن التكامل للمقدار (udv) بدلالة التكامل للمقدار (vdu) والذي يفترض ان يكون أســهل من الأول وفكرة التكامل في هذه الطريقة هي اختيار دالة (u) القابلة للاشــتقاق واختيار (dv) المقدار القابل للتكامل.

Example (33): Evaluate $I = \int \ln x dx$

في هذا المثال لانستطيع أن نكامل $(\ln x)$ أي من الخطأ فرضها (dv) لذلك نفرض

$$u = \ln x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x} \quad \& \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = uv - \int vdu = (\ln x)(x) - \int (x)\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

Example (34): Evaluate $I = \int x \ln x dx$

في هذا المثال لانستطيع أن نكامل $(\ln x)$ أي من الخطأ فرضها (dv) لذلك نفرض

$$u = \ln x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \quad \& \quad dv = xdx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = uv - \int vdu = (\ln x)(\frac{x^2}{2}) - \int (\frac{x^2}{2})\frac{1}{x}dx = (\ln x)(\frac{x^2}{2}) - \frac{1}{2}\int xdx = (\frac{x^2}{2})(\ln x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c$$

Example (35): Evaluate $I = \int (x-2)\ln x dx$

في هذا المثال لانستطيع أن نكامل $(\ln x)$ أي من الخطأ فرضها (dv) لذلك نفرض

$$u = \ln x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \quad \& \quad dv = (x-2)dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$I = uv - \int vdu = (\ln x)(\frac{x^2}{2} - 2x) - \int (\frac{x^2}{2} - 2x)\frac{1}{x}dx = (\ln x)(\frac{x^2}{2} - 2x) - \int (\frac{x}{2} - 2)dx$$

$$= (\ln x)(\frac{x^2}{2} - 2x) - (\frac{x^2}{4} - 2x + c)$$

Example (36): Evaluate $I = \int \sin^{-1} x dx$

$$u = \sin^{-1} x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \& \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = uv - \int v du = (\sin^{-1} x)(x) - \int (x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int (1-x^2)^{-1/2} (-2x) dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + c = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Example (37): Evaluate $I = \int \tan^{-1} x dx$

$$u = \tan^{-1} x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad \& \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = uv - \int v du = (\tan^{-1} x)(x) - \int (x) \frac{1}{1+x^2} dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2}$$

$$I = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + c$$

بنفس الطريقة يمكننا حساب المثال التالي

In the same way we can evaluate the following example

$$\int \cot^{-1} x dx = x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Example (38): Evaluate $I = \int x e^x dx$

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad \& \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = uv - \int v du = (x)(e^x) - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Example (39): Evaluate $I = \int x^2 e^x dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow du = 2x dx \quad \& \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = uv - \int v du = (x^2)(e^x) - \int e^x (2x) dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad \& \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = x^2e^x - 2[uv - \int vdu] = x^2e^x - 2[xe^x - \int e^x dx] = x^2e^x - 2[xe^x - e^x + c]$$

$$I = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2c = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c_1$$

Example (40): Evaluate $I = \int x\sin x dx$

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad \& \quad dv = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$I = uv - \int vdu = (x)(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x - (-\sin x) + c = -x\cos x + \sin x + c$$

Example (41): Evaluate $I = \int x\cos x dx$

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad \& \quad dv = \cos x dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$I = uv - \int vdu = (x)(\sin x) - \int(\sin x)dx = x\sin x + \cos x + c$$

Example (42): Evaluate $I = \int x^2 \cos x dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow du = 2xdx \quad \& \quad dv = \cos x dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$I = uv - \int vdu = (x^2)(\sin x) - \int(\sin x)(2x)dx = x^2 \sin x - 2\int x\sin x dx \quad = x^2 \sin x - 2[uv - \int vdu]$$

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad \& \quad dv = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$I = x^2 \sin x - 2[uv - \int vdu] = x^2 \sin x - 2[(x)(-\cos x) - \int(-\cos x)dx]$$

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

Example (43): Evaluate $I = \int x^2 \sin x dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow du = 2xdx \quad \& \quad dv = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$I = uv - \int vdu = (x^2)(-\cos x) - \int(-\cos x)(2x)dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2[uv - \int vdu]$$

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad \& \quad dv = \cos x dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$I = -x^2 \cos x + 2[x\sin x - \int \sin x dx] = -x^2 \cos x + 2x\sin x - 2\int \sin dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

Example (44): Evaluate $I=\int e^x \cos x dx$

$u=e^x \quad \Rightarrow du=e^x dx \quad \& \quad dv=\cos x dx \quad \Rightarrow \quad v=\sin x$

$I=uv-\int v du=(e^x)(\sin x)-\int e^x(\sin x)dx$

$u=e^x \quad \Rightarrow du=e^x dx \quad \& \quad dv=\sin x dx \quad \Rightarrow \quad v=-\cos x$

$I=e^x \sin x-[e^x(-\cos x)-\int(-\cos x)e^x dx]$

$I=e^x \sin x+e^x \cos x-\int e^x \cos x dx$

$I=e^x \sin x+e^x \cos x-I$

$2I=e^x \sin x+e^x \cos x$

$I=\dfrac{e^x \sin x+e^x \cos x}{2}$

Example (45): Evaluate $I=\int e^x \sin x dx$

$u=e^x \quad \Rightarrow du=e^x dx \quad \& \quad dv=\sin x dx \quad \Rightarrow \quad v=-\cos x$

$I=uv-\int v du=(e^x)(-\cos x)-\int e^x(-\cos x)dx \;=-e^x \cos x+\int e^x \cos x dx$

$u=e^x \quad \Rightarrow du=e^x dx \quad \& \quad dv=\cos x dx \quad \Rightarrow \quad v=\sin x$

$I=-e^x \cos x+[uv-\int v du]$

$I=-e^x \cos x+[e^x \sin x-\int e^x \sin x dx]=-e^x \cos x+e^x \sin x-\int e^x \sin x dx$

$I=-e^x \cos x+e^x \sin x-I$

$2I=-e^x \cos x+e^x \sin x$

$I=\dfrac{-e^x \cos x+e^x \sin x}{2}$

Example (46): Evaluate $I=\int e^{ax} \sin bx dx$

$u=e^{ax} \quad \Rightarrow du=ae^x dx \quad \& \quad dv=\sin bx dx \quad \Rightarrow \quad v=\dfrac{-1}{b}\cos bx$

$I=uv-\int v du=(e^{ax})\cdot(\dfrac{-1}{b}\cos bx)-\int ae^{ax}(\dfrac{-1}{b}\cos bx)dx \;=\dfrac{-1}{b}e^{ax}\cos bx+\dfrac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx$

$u_1=e^{ax} \quad \Rightarrow du_1=ae^x dx \quad \& \quad dv_1=\cos bx dx \quad \Rightarrow \quad v_1=\dfrac{1}{b}\sin bx$

$I=\dfrac{-1}{b}e^{ax}\cos bx+\dfrac{a}{b}[u_1 v_1-\int v_1 du_1]$

$$I = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\left[e^{ax} (\frac{1}{b} \sin bx) - \int (\frac{1}{b} \sin bx)(a e^{ax}) dx \right]$$

$$I = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx dx$$

$$I = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} I + c$$

$$I + \frac{a^2}{b^2} I = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx + c$$

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} I = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx + c$$

$$I = \frac{\frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx}{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} + c$$

$$I = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx \right) + c$$