جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة :

الطريقة الحادية عشر : طريقة تكامل دوال من النوع $(\tan x)^n$, $(\cot x)^n$

الطريقة الثانية عشر : طريقة تكامل دوال من النوع $(\csc x)^n$, $(\sec x)^n$

الطريقة الحادية عشر Eleventh Method

طريقة تكامل دوال من النوع $(\tan x)^n$, $(\cot x)^n$

$$I=\int(\tan x)^n dx=\int(\tan x)^{n-2}(\tan x)^2 dx=\int(\tan x)^{n-2}(\sec^2 x-1)dx$$

$$I=\int(\tan x)^{n-2}\sec^2 x dx-\int(\tan x)^{n-2}dx=\frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1}-\int(\tan x)^{n-2}dx$$

$$\int(\tan x)^n dx=\frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1}-\int(\tan x)^{n-2}dx$$

وبنفس الطريقة تماما نشتق القانون

$$\int(\cot x)^n dx=\frac{-(\cot x)^{n-1}}{n-1}-\int(\cot x)^{n-2}dx$$

اما تكامل دوال من النوع $(\tan ax)^n$, $(\cot ax)^n$

$$I=\int(\tan ax)^n dx=\int(\tan ax)^{n-2}(\tan ax)^2 dx=\int(\tan ax)^{n-2}(\sec^2 ax-1)dx$$

$$I=\int(\tan ax)^{n-2}\sec^2 ax dx-\int(\tan ax)^{n-2}dx=\frac{(\tan ax)^{n-1}}{a(n-1)}-\int(\tan ax)^{n-2}dx$$

$$\int(\tan ax)^n dx=\frac{(\tan ax)^{n-1}}{a(n-1)}-\int(\tan ax)^{n-2}dx$$

وبنفس الطريقة تماما نشتق القانون

$$\int(\cot ax)^n dx=\frac{-(\cot ax)^{n-1}}{a(n-1)}-\int(\cot ax)^{n-2}dx$$

Example (53): Evaluate $I=\int\tan^3 x dx$

$$\int(\tan x)^n dx=\frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1}-\int(\tan x)^{n-2}dx$$

$$\int(\tan x)^3 dx=\frac{(\tan x)^{3-1}}{3-1}-\int(\tan x)^{3-2}dx=\frac{(\tan x)^2}{2}-\int\tan x dx=\frac{(\tan x)^2}{2}+\ln(\cos x)+c$$

Example (54): Evaluate $I=\int\tan^4 x dx$

$$\int(\tan x)^n dx=\frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1}-\int(\tan x)^{n-2}dx$$

$$I=\int(\tan x)^4dx=\frac{(\tan x)^{4-1}}{4-1}-\int(\tan x)^{4-2}dx=\frac{(\tan x)^3}{3}-\int(\tan x)^2dx$$

$$I=\frac{(\tan x)^3}{3}-\left(\frac{(\tan x)^1}{1}-\int(\tan x)^0dx\right)=\frac{(\tan x)^3}{3}-\tan x+\int dx=\frac{(\tan x)^3}{3}-\tan x+x+c$$

الطريقة الثانية عشر Twelfth Method

طريقة تكامل دوال من النوع $(\csc x)^n$, $(\sec x)^n$

$$I=\int(\sec x)^ndx=\int(\sec x)^{n-2}(\sec x)^2dx$$

$$u=(\sec x)^{n-2}\Rightarrow du=(n-2)(\sec x)^{n-3}\sec x\tan x\,dx\quad\&\quad dv=(\sec x)^2dx\Rightarrow v=\tan x$$

$$I=\int(\sec x)^ndx=uv-\int v\,du$$

$$I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)-\int(\tan x)(n-2)(\sec x)^{n-3}\sec x\tan x\,dx$$

$$I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)-(n-2)\int(\sec x)^{n-2}(\tan x)^2dx$$

$$I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)-(n-2)\int(\sec x)^{n-2}(\sec^2x-1)dx$$

$$I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)-(n-2)\int(\sec x)^ndx+(n-2)\int(\sec x)^{n-2}dx$$

$$I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)-(n-2)I+(n-2)\int(\sec x)^{n-2}dx$$

$$I+(n-2)I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)+(n-2)\int(\sec x)^{n-2}dx$$

$$(n-1)I=(\sec x)^{n-2}(\tan x)+(n-2)\int(\sec x)^{n-2}dx$$

$$I=\frac{(\sec x)^{n-2}(\tan x)}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int(\sec x)^{n-2}dx$$

$$\int(\sec x)^ndx=\frac{(\sec x)^{n-2}(\tan x)}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int(\sec x)^{n-2}dx$$

وبنفس الطريقة تماما نشتق القانون

$$\int(\csc x)^ndx=\frac{-(\csc x)^{n-2}(\cot x)}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int(\csc x)^{n-2}dx$$

اما تكامل دوال من النوع $(\csc ax)^n$, $(\sec ax)^n$

$$I=\int(\sec ax)^ndx=\int(\sec ax)^{n-2}(\sec ax)^2dx$$

$$u=(\sec ax)^{n-2}\Rightarrow du=a(n-2)(\sec ax)^{n-3}\sec ax\tan ax\,dx\quad\&\quad dv=(\sec ax)^2dx\Rightarrow v=\frac{1}{a}\tan ax$$

$$I=\int(\sec ax)^{n}dx=uv-\int vdu$$

$$I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)-\int\frac{1}{a}(\tan ax)(a)(n-2)(\sec ax)^{n-3}\sec ax\tan axdx$$

$$I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)-(n-2)\int(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)^{2}dx$$

$$I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)-(n-2)\int(\sec ax)^{n-2}(\sec^{2}ax-1)dx$$

$$I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)-(n-2)\int(\sec ax)^{n}dx+(n-2)\int(\sec ax)^{n-2}dx$$

$$I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)-(n-2)I+(n-2)\int(\sec ax)^{n-2}dx$$

$$I+(n-2)I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)+(n-2)\int(\sec ax)^{n-2}dx$$

$$(n-1)I=\frac{1}{a}(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)+(n-2)\int(\sec ax)^{n-2}dx$$

$$I=\frac{(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int(\sec ax)^{n-2}dx$$

$$\int(\sec ax)^{n}dx=\frac{(\sec ax)^{n-2}(\tan ax)}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int(\sec ax)^{n-2}dx$$

وبنفس الطريقة تماما نشتق القانون

$$\int(\csc ax)^{n}dx=\frac{-(\csc ax)^{n-2}(\cot ax)}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int(\csc ax)^{n-2}dx$$

Example (55): Evaluate $I=\int\sec^{3}xdx$

$$\int(\sec x)^{n}dx=\frac{(\sec x)^{n-2}(\tan x)}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int(\sec x)^{n-2}dx$$

$$\int(\sec x)^{3}dx=\frac{(\sec x)^{3-2}(\tan x)}{3-1}+\frac{3-2}{3-1}\int(\sec x)^{3-2}dx=\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{1}{2}\int\sec xdx$$

$$\int(\sec x)^{3}dx=\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{1}{2}\ln(\sec x+\tan x)+c$$