جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة
المادة : الاحصاء والاحتمالية

Some Special Probability Distributions

م. اسماء صالح قدوري

asmaa.salih@tu.edu.iq

بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة

Some Special Probability Distributions

تصنف التوزيعات الاحتمالية إلى توزيعات متقطعة (منفصلة)مثل التوزيع المنتظم المتقطع وتوزيع ذي الحدين وتوزيع برنولي وتوزيع ذي الحدين السالب وتوزيع بواسون وغيرها وتوزيعات مستمرة (متصلة) ومن امثلتها التوزيع المنتظم المستمر والتوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي والتوزيع الاسي وتوزيع كوشي وتوزيع كاما وتوزيع مربع كاي وتوزيعF وتوزيع t-student وغيرها من التوزيعات المستمرة .

بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

Some Special Discrete Probability Distributions

1 - توزيع برنولي Bernoulli Distribution

توزيع برنولي احد التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الناتجة من تجربة عشوائية بسيطة جدا وهي واحدة من التجارب التي فيها نتيجتان ممكنتا الحدوث ، مثل ظهور الصورة أو الكتابة ، النجاح أو الفشل ، وهو مناسب لتحديد نتيجتين ممكنتي الحدوث.

تعريف :

يقال للمتغير العشوائي X بان له توزيع برنولي إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية بالصورة الآتية

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0,1,0 \leq p \leq 1$$

ويرمز له بالرمز $x \sim br(p)$

$$\sum_{x=0}^{1} f(x) = \sum_{x=0}^{1} p^x(1-p)^{1-x} = p^0(1-p)^1 + p^1(1-p)^0$$
$$= 1 - p + p = 1$$

وبما أن $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x فأن f دالة كثافة احتمالية.

مبرهنة :

من خواص توزيع برنولي

i - الوسط الحسابي $\mu = E(X) = p$

ii - التباين $v(x) = p(1-p)$

iii – الدالة المولدة للعزوم $M_X(t) = 1 - P + Pe^t$

البرهان :

i - $E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x.f(x) = \sum_{x=0}^{1} xp^x(1-p)^{1-x} =$

$$= 0.p^0(1-p)^1 + 1.p^1(1-p)^0 = 0 + p = p$$

ii - $E(\mathrm{x})^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2.f(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2p^x(1-p)^{1-x} =$

$$= 0.p^0(1-p)^1 + 1.p^1(1-p)^0 = 0 + p = p$$

$$v(x) = E(x^2) + (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

iii - $M_X(t) = Ee^{tx} = \sum_{x=0}^{x} e^{tx}f(x) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx}p^x(1-p)^{1-x} =$

$$e^0p^0(1-p)^1 + e^tp^1(1-p)^0 = 1 - p + pe^t$$

2 – توزيع ذي الحدين The Binomial Distribution

توزيع ذي الحدين ناتج من تجربة عشوائية لها ناتجان فقط احدهما نجاح التجربة والأخر فشلها ويكون الشرط الاساسي أن احتمال النجاح لا يتأثر بتكرار التجربة . أي أن توزيع ذي الحدين هو تكرار لتجربة برنولي ، ويتميز توزيع ذي الحدين بعدة خصائص منها:

1 – تتكون التجربة من أكثر من محاولة .فإذا تكونت التجربة من محاولة واحدة يكون توزيع برنولي.

2 – استقلال المحاولات عن بعضها البعض ، أي ثابت احتمال النجاح p ،وبالتالي فأن احتمال الفشل q= 1-p.

3 – هذه المحاولات جميعا متماثلة ومستقلة.

4 – احتمال النجاح ثابت في كل محاولة.

لنفترض تجربة ما تكررت n من المرات وأن فضاء العينة يتكون من حدثيين ابتدائيين فقط A, B وعادة ما يسمى الحدث A بالحدث الناجح أو المحاولة الناجحة ويسمى B الحدث الفاشل أو المحاولة الفاشلة.

ويلاحظ أن احتمالية وقوع الحدث A في كل محاولة ثابت ، وأن المحاولات مستقلة بعضها عن البعض الاخر .

أن احتمالية وقوع الحدث A (الحدث الناجح)نرمز له بالرمز P واحتمالية وقوع الحدث B (الحدث الفاشل) نرمز له بالرمز $\mathrm{q} = 1 - \mathrm{p}$ أي أن $P + Q = 1$.

مبرهنة

احتمال وقوع x من النجاحات في n من المحاولات المتكررة هو

$$b(x,n,p) = C_x^n \; p^x q^{n-x}$$

حيث
$$\boldsymbol{C_x^n} \quad = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{x}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{x})!}$$

البرهان:

يتكون فضاء العينة Ω من كل المتتابعات المكونة من n من العناصر المرتبة وتكون عناصرها أما a الذي يمثل النجاح أو b الذي يمثل الفشل.

ليكن الحدث A يحتوي على x من مرات النجاح و B يحتوي على $n-x$ من مرات الفشل فأن

$p(A) = C_x^n \; p^x q^{n-x}$ لان احتمال أي عنصر في A هو $p^x q^{n-x}$

مثال :

1- $b\left(2,5,\frac{1}{3}\right) = C_2^5 (\frac{1}{3})^2 (1-\frac{1}{3})^3 = \frac{5!}{2!\times 3!} (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3})^3$

$$= \frac{20}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}$$

2- $b\left(3,6,\frac{1}{2}\right) = C_3^6 (\frac{1}{2})^3 (1-\frac{1}{2})^3 = \frac{6!}{3!\times 3!} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^3$

$$= \frac{20}{1} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

ملاحظة : احتمال الفشل في كل المحاولات هو q^n ولهذا يكون احتمال نجاح واحد على الاقل هو q^n -1.

تعريف :

يقال للمتغير العشوائي X بأن له توزيع ذي الحدين إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له بالصورة الآتية :

$$f(x) = P\{X = x\} = C_x^n p^x (1-P)^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,\cdots,n, \quad 0 < P < 1$$

ويرمز له بالرمز $X \sim b(n,p)$

ملاحظة

مفكوك ذي الحدين هو

$$\sum_{x=0}^{n} C_x^n a^x b^{n-x} = (a+b)^n$$

ولبرهنة أن $f(x)$ تحقق شروط الدالة الاحتمالية

اي تحقق 1 - $f(x) \geq 0$ 2 - $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$

1 - الشرط الاول $f(x) \geq 0$

بما أن x متغير عشوائي متقطع و $n \in I^+$

$$x = 0,1,2,3, \dots \dots, n\,; \quad x \leq n$$

$$n - x \geq 0$$

$$\therefore C_x^n \geq 1\,, \ p^x > 0 \quad \text{for } 0 < p < 1$$

$$(1-p)^{n-x} > 0$$

2 – الشرط الثاني $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$

$$\sum_{\forall x} f(x) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n \ p^x q^{n-x}$$

$$= C_0^n \ p^0 q^{n-0} + C_1^n \ p^1 q^{n-1} + \cdots + C_x^n \ p^x q^{n-n}$$

$$= q^n + npq^{n-1} + \cdots + p^n$$

وباستخدام مفكوك ذي الحدين

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

$$\sum_{\forall x} f(x) = q^n + npq^{n-1} + \cdots + p^n = (q+p)^n$$

وبما أن $p + q = 1$

$$\therefore \sum_{\forall x} f(x) = (1)^n = 1$$

وبذلك يتضح ان $f(x)$ تحقق شروط الدالة الاحتمالية.