جامعة تكريت

كلية التربية للبنات

قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة

المادة : الاحصاء والاحتمالية

الحوادث المستقلة

م. اسماء صالح قدوري

asmaa.salih@tu.edu.iq

الحوادث المستقلة Independent Events

يقال للحادثين B,A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية معينة أنها مستقلان اذا لم يؤثر احدهما على وقوع الاخر.

وهذا يعني ان B,A حادثين مستقلين اذا وفقط اذا تحققت العلاقة التالية

$$\boxed{P(A) \times P(B) = P(AB)}$$

ملاحظة : كل حادثين مستقلين في Ω فانهما يجب ان يكون متصلين والعكس غير صحيح

مثال :- اذا كان B,A حادثين مستقلين في Ω بحيث ان P(A) = 0.4 , P(B) = 0.2

جد :- $P (A \cup B)$

الحل : - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

=P(A) + P(B) – P(A) – P(B)

= 0.4 + 0.2 – (0.4) (0.2)

= 0.6 – 0.08

= 0.52

نظرية 1

<u>نظرية (1)</u> اذا كان كل من A وB حادثين مستقلين في تجربة عشوائية معينة فأن :-

1) B^C , A حادثين مستقلين ايضا [indep Events] $\longleftarrow$ $P(A).P(B^C) = P(AB^C)$
2) B, A^C حادثين مستقلين ايضا [indep Events] $\longleftarrow$ $P(A^c).P(B) = P(A^CB)$
3) B^C, A^C حادثين مستقلين ايضا [indep Events] $\longleftarrow$ $P(A^c).P(B^C) = P(A^CB^C)$

مثال :- اذا كان احتمال نجاح احمد في امتحان معين هو (0,8) واحتمال نجاح سعيد في نفس الامتحان هو (0,7) جد :-

1- احتمال نجاح احمد وعدم نجاح سعيد
2- احتمال نجاح احدهما على الاكثر

الحل :-

نفرض ان نجاح احمد هو A ← P(A)= 0.8

نفرض ان نجاح سعيد هو B ← P(B) = 0.7

نلاحظ استقلال الحادثين

1) $P(AB^{C}) = P(A)P(B^{C}) = (0.8)[1 - 0.7] = 0.24$

2) $P(AB^{C}) + P(A^{C}B) + P(A^{C}B^{C})$

$= P(A)P(B^{C}) + P(A^{C}).P(B) + P(A^{C})P(B^{C})$

= (0.8)(0.3) + (0.2)(0.7) + (0.2)(0.3)

= 0.44

نظرية (2)

إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين بحيث $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ ، فأن A وB حوادث متصلة

البرهان :

بما إن A و B حوادث مستقلة $\leftarrow$ $p(A), P(B) = P(AB)$

لبرهنة A و B حوادث متصلة

وهذا يعني يجب أن نبرهن $AB \neq \emptyset$

بما أن $A \neq \emptyset \rightarrow p(A) \neq 0$

$B \neq \emptyset \rightarrow p(B) \neq 0$

$p(A) \times P(B) \neq 0 \quad \rightarrow \quad P(AB) \neq 0$

$\therefore AB \neq \emptyset$

ملاحظة : العكس من النظرية اعلاه غير صحيح بمعنى اذا كانت A و B حادثتين متصلتين (Joint) فانه ليس من الضروري أن تكون الحادثتين A و B مستقلتين (Independent) .

نظرية (3) اذا كان كل من A,B حادثين منفصلين (disjoint events) بحيث ان $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ فأن A,B حادثين معتمدين (غير مستقلين) (dependent)

البرهان :

A و B حوادث مستقلة

$\therefore AB = \emptyset \rightarrow \quad P(AB) = 0 \; \ldots\ldots (1)$

وبما ان $A \neq \emptyset \rightarrow p(A) \neq 0$

$B \neq \emptyset \rightarrow p(B) \neq 0$

$p(A) \times P(B) \neq 0 \quad \ldots\ldots(2)$

$p\ (A)\ P(B)\ \neq P(AB)$

∴ A و B حوادث معتمدة

الحوادث المعتمدة " Dependent Events "

يقال ان A,B حادثين معتمدين (غير مستقلين) اذا وفقط اذا $P(A) .P(B) \neq P(AB)$

مثال :- سحب عنصرين من مجموعة مكونة من اربعة عناصر {1,2,3,4} عنصر عنصر بدون ارجاع (ومع الارجاع) فاذا كانت الحادثين B,A كما يلي :-

A : العنصر الاول فيها هو (2).

B : العنصر الثاني بها هو (1)

هل أن A,B حادثين مستقلين ؟

الحل :- طريقة السحب بدون ارجاع

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = 12$$

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,2)\ (2,1)\ (3,1)\ (4,1) \\ (1,3)\ (2,3)\ (3,2)\ (4,2) \\ (1,4)(2,4)(3,4)(4,3) \end{Bmatrix}$$

A = {(2,1) , (2,3) , (2,4) } ⊂ S ⇒ $\mathrm{P(A)}\ \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

B = {(2,1),(3,1),(4,1)} ⊂ S ⇒ P(B) = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

AB = {(2,1)} ⊂ S ⇒ P(AB) = $\frac{1}{12}$

P(A) × P(B) = $\frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ نلاحظ الان

P(AB) = $\frac{1}{12}$

$$\therefore P(A) \times P(B) \neq P(AB)$$

∴ B,A غير مستقلين

الحادثين A,B غير مستقلين

2) طريقة السحب الثانية (مع الارجاع)

عدد العناصر هو (4^2) = 16

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4) \\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4) \\ (3,1)(3,2)(3,3)(3,4) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4) \end{Bmatrix}$$

A = { (2,1) (2,2) (2,3) (2,4)}

⇨ $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$B = \{(1,1), (2,1),(3,1),(4,1)\}$

⇨ $P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$AB = \{(2,1)\}$

⇨ $P(AB) = \frac{1}{16}$

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\therefore \quad P(AB) = P(A) \times P(B)$

∴ الحادثتين مستقلتين

***استقلالية ثلاث حوادث**

تعريف: اذا كانت Cو B و A حوادث ، فأنها تكون مستقلة اذا وفقط اذا

1- a. $p(A).P(B) = P(AB)$ {A و B حوادث معتمدة}

b. $p(A).P(C) = P(AC)$ {A وC حوادث معتمدة}.

c. $p(B).P(C) = P(BC)$ {B و C حوادث معتمدة}.

2- $p(A).P(B)p(C) = P(ABC)$