جامعة تكريت

كلية التربية للبنات

قسم الرياضيات

المرحلة الثانية

مادة التفاضل المتقدم

# متسلسلات تايلر وماكلورين

# Tayler and Maclorian series

اسم التدريسي:   أ.م. ايلاف صباح عبدالواحـد

الايميل:   elafs.math@tu.edu.iq

# متسلسلة تايلر Tyler Series (1)

اذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق $n$ من المرات عند النقطة $x_0$ فإن جميع الحدود للدالة $f$ عند النقطة $x_0$

تسمى حدود تايلروالصيغة العامة لها تكون بالشكل التالي

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(a)(x-a)^{n}}{n!}=f(a)+\frac{f'(a)(x-a)^{1}}{1!}+\frac{f''(a)(x-a)^{2}}{2!}+\frac{f'''(a)(x-a)^{3}}{3!}+\ldots+\frac{f^{n}(a)(x-a)^{n}}{n!}$$

والهدف من متسلسلة تايلرهو تحويل دالة يصعب التعامل معها الى دالة كثيرة حدود غير منتهية يسهل التعامل معها.

**Ex:** find Tyler series of $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad when \quad a=1.$

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f(1)=1$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^{2}}\Rightarrow f'(1)=-1$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^{3}}\Rightarrow f''(1)=2=2!$$

$$f'''(x)=\frac{-6}{x^{4}}\Rightarrow f'''(1)=-6=-3!$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^{5}}\Rightarrow f^{(4)}(1)=24=4!$$

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(x)+\frac{(x-a)^{2}}{2!}f''(x)+\frac{(x-a)^{3}}{3!}f'''(x)+\ldots$$

$$f(x)=1-(x-1)+\frac{(x-1)^{2}}{2!}(2!)-\frac{(x-1)^{3}}{3!}(3!)+\frac{(x-1)^{4}}{4!}(4!)+\ldots$$

$$f(x)=1-(x-1)+(x-1)^{2}-(x-1)^{3}+(x-1)^{4}+\ldots(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$$

**Ex:** find Tyler series of $f(x) = e^x$ when $a = 1.$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(1) = e^1 = e$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(1) = e^1 = e$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(1) = e^1 = e$$

$$f^n(x) = e^x \Rightarrow f^n(1) = e^1 = e$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} = f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(1)(x-1)^n}{n!}$$

$$f(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \frac{e(x-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{e(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}$$

**Ex:** find Tyler series of $f(x) = \sin x$ when $a = \frac{\pi}{6}$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(x-\frac{\pi}{6})}{1!} - \frac{1}{2(2!)}(x-\frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(x-\frac{\pi}{6})}{3!} + \ldots$$

## متسلسلة ماكلورين Maclorian series (2)

تسمى متسلسلة تايلر بمتسلسلة ما كلورين للدالة عندما $a = 0$

أي ان متسلسلة ما كلورين هي حالة خاصة من متسلسلة تايلر عندما

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(a)x^{n}}{n!}=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^{2}}{2!}+\frac{f'''(0)x^{3}}{3!}+\ldots+\frac{f^{n}(a)(x-a)^{n}}{n!}$$

**<u>Ex:</u> Find Maclorian series of the function $f(x) = e^{-2x}$**

$$f(x)=e^{-2x}\Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=-2e^{-2x}\Rightarrow f'(0)=-2$$

$$f''(x)=4e^{-2x}\Rightarrow f''(0)=4$$

$$f'''(x)=-8e^{-2x}\Rightarrow f'''(0)=-8$$

$$f^{(4)}(x)=16e^{-2x}\Rightarrow f^{(4)}(0)=16$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}f^{n}\frac{x^{n}}{n!}=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^{2}}{2!}+f'''(0)\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}f^{n}\frac{x^{n}}{n!}=1-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^{2}}{2!}-\frac{8x^{3}}{3!}+\frac{16x^{4}}{4!}+\ldots+\frac{(-2)^{n}x^{n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^{n}}{n!}$$

**<u>Ex:</u> Find Maclorian series of the function $f(x) = \sin x$**

$$f(x)=\sin x\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x\Rightarrow f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos x\Rightarrow f'''(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x\Rightarrow f^{(4)}(0)=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}\frac{x^{n}}{n!}=0+\frac{1}{1!}x+0-\frac{1}{3!}x^{3}+0+\frac{1}{5!}x^{5}+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}\frac{x^{n}}{n!}=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}-\frac{1}{7!}x^{7}+\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

**<u>Ex:</u> Find Maclorian series of the function** $\boldsymbol{f(x)=\ln(x+1)}$

$$f(x)=\ln(x+1)\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^{2}}\Rightarrow f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{-2(-1)(x+1)}{(x+1)^{4}}=\frac{2}{(x+1)^{3}}\Rightarrow f'''(0)=2$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-3(2)(x+1)^{2}}{(x+1)^{6}}=\frac{-6}{(x+1)^{4}}\Rightarrow f^{(4)}(0)=-6$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{-4(-6)(x+1)^{3}}{(x+1)^{8}}=\frac{24}{(x+1)^{5}}\Rightarrow f^{(5)}(0)=24$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}\frac{x^{n}}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{n}\frac{x^{n}}{n!}=0+1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{2}{3!}x^{3}-\frac{6}{4!}x^{4}+\frac{24}{5!}x^{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^{n+1}$$