جامعة تكريت

كلية التربية للبنات

قسم الرياضيات

المرحلة الثانية

مادة التفاضل المتقدم

متسلسلات القوى والمتسلسلة التلسكوبية

اسم التدريسي: أ.م. ايلاف صباح عبدالواحد

الايميل: elafs.math@tu.edu.iq

متسلسلات القوى Power seies

هي متسلسلة تعرف بالشكل الاتي

$$\sum_{n=0}^{\infty} cn(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

هي مركز المتسلسلة. a وثوابت c_0, c_1, c_2, c_n

Ex: find the value of x of the following

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(10)^n} = 1 + \frac{(x-5)}{10} + \frac{(x-5)^2}{100} + \dots$$

$$a = 1 \quad , \quad r = \frac{(x-5)}{10}$$

$$|r| = \left|\frac{x-5}{10}\right| = \frac{x-5}{10} \prec 1$$

$$x-5 \prec 10 \Rightarrow -10 \prec x-5 \prec 10 \Rightarrow -10+5 \prec x-5+5 \prec 10+5$$

$$\Rightarrow -5 \prec x \prec 15$$

اذا كانت $x = -5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5-5)^n}{(10)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{(10)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-10}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

اذا كانت $x = 15$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(15-5)^n}{(10)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10)^n}{(10)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n$$

$$x \in (-5 ، 15]$$

المتسلسلة متقاربة ماعدا ذلك تكون متباعدة.

$$(2)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3$$

$a = 1 \quad , \quad r = x$

$|r| = |x| \prec 1 \Rightarrow -1 \prec x \prec 1$

اما

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

او

$$x = +1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (+1)^n$$

$x \in (-1 ، 1]$

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n = 1 - (x-2) + (x-2)^2 + \dots$$

$a = 1 \quad , \quad r = -(x-2)$

$|r| = |-(x-2)| \Rightarrow |r| \prec 1$

$|x-2| \prec 1 \Rightarrow -1 \prec x-2 \prec 1 \Rightarrow -1+2 \prec x-2+2 \prec 1+2 \Rightarrow 1 \prec x \prec 3$

اذا كانت $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} = 1+1+1+1$$

متسلسلة متقاربة.

$x=3$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}=1-1+1-1+\ldots$$

متسلسلة متباعدة.

$x\in[1،3)$

المتسلسلة التلسكوبية A telescopic Series

وهي نوع خاص من المتسلسلات وليس لها صيغة عامة مثل متسلسلات القوى او المتسلسلة الهندسية ويمكن ايجاد مجموعها عن طريق تجزئة الكسور.

Ex: find $\{S_n\}$ of the telescopic Series

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

لنأخذ

$$an=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

فإن

$$sn=\sum_{k=1}^{\infty}ak$$

$$ak=\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2}=\frac{A(k+2)+B(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{(A+B)k+2A+B}{(k+1)(k+2)}$$

$A+B=0..........(1)$

$2A+B=1.......(2)$

$A=1$

$B=-1$

$$ak = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$sn = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$sn = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)} \Rightarrow \quad sn = \left\{\frac{n}{2(n+2)}\right\}$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots. + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

لنأخذ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ فأن $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ اي ان $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

$A + B = 0 \ldots (1)$

$A = 1 \ldots\ldots\ldots (2)$

$A = 1 \quad , \quad B = -1$

$$a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$Sn = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$Sn = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$Sn = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$