جـــــامعة تكــــــريت

كلية التربية للبنات قسم الرياضيات

المادة: الـهندسة

المرحلة الثانيـة

الموضوع : الأنظمة البديهية

مدرس المادة : م.م فاتن هيثم مولود

الأيميل Fatin.Haitham@tu.edu.iq

الأنظمة البديهية

مكونات النظام البديهي (تعاريف ، مجموعة بديهيات ومبرهنات)

التعاريف : أي تعريف لاي مصطلح في الرياضيات يجب ان يعبرعنه ببساطة وان يكون غير دوري ويصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها.

فالبساطة : تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات أبسط منه أي بكلمات معروفة .
الدورية : عند تعريف كلمة ما فاننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة.

الوصف الوحيد : ان التعريف الدقيق لكلمة ما يجب ان يصف هذه الطريقة بطريقة بحيث لا ينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى.

*تصنف الكلمات الاولية الى نوعين :

1- الكلمات التقنية : تختلف هذه الكلمات من موضوع الى موضوع اخر ففي الهندسة بصورة خاصة كمثال (النقطة والمستقيم , والتطابق ....) ربما تعتبر هذه الكلمات اولية في النظام المعطى ومن المحتمل في انظمة اخرى.

2- الكلمات المنطقية مثل (كل و لأي، بعض ، يوجد ....) حيث يوجد عدد غير محدد من الكلمات المنطقية.

البديهيــات: هي العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان وهي الحجر الأساس للبناء في النظام البديهي.

المبــرهنــات: هي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام.

- ان علم الهندسة هو عبارة عن نظام بديهي لأننا نستخدم مجموعة من (بديهيات وتعاريف ومبرهنات) ان افضل واقرب مثال بالنسبة الينا للنظام البديهي هو الهندسة الاقليدية.

المستوى الأسقاطي **Projective Plane**

يتكون من مجموعة نرمز لهذه المجموعة بالرمز($\boldsymbol{\pi}$) وتتضمن كلمات اولية تقنية تدعى نقاط يرمز لها بالحروف الكبيرة A,B,C ومجموعات جزئية من $\boldsymbol{\pi}$ تدعى مستقيمات يرمز لها بحروف صغيرة ..... l,m,n, .

1 .أي نقطتين مختلفتين في $\boldsymbol{\pi}$ يحتويهما مستقيم واحد فقط .

2. كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل.

3. يوجد في الأقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الأقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان A لا تنتمي الى ℓ .

4. أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل.

مبرهنة (1): أي مستقيمين مختلفين في المستوى الأسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط.

البرهان:

ليكن ℓ و m مستقيمين في $\boldsymbol{\pi}$ هذا يعني ان $\ell \neq m$ ، من بديهية (٤) [أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل] بحيث ان A ينتمي الى m و ℓ.

سنفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث B تنتمي الى ℓ و m .

من بديهية (١) [أي نقطتين مختلفتين في $\boldsymbol{\pi}$ يحتويهما مستقيم واحد فقط] سوف نستنتج ان $\ell = m$ وهذا يتناقض مع الفرض لكون $\ell \neq m$.

اذن ℓ , m يشتركان في نقطة واحدة فقط (وهو المطلوب).

مبرهنة (2): اي نقطة في المستوى الأسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الأقل.

البرهان:

لتكن P اي نقطة في $\boldsymbol{\pi}$ ، من بديهية (٣) يوجد مستقيم ℓ بحيث ان $\ell \neq P$

من بديهية (٢) كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل ولتكن A_1,A_2,A_3

من بديهية (١) أي نقطتين مختلفتين في $\boldsymbol{\pi}$ يحتويهما مستقيم واحد فقط

$\Leftarrow$اذن نستنتج من بديهية (١) توجد ثلاث مستقيمات في الأقل وهي PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

المستوى الأسقاطي المنتهي

هو نفسه المستوي الأسقاطي ولكن يحتوي مجموعة منتهية من النقاط والمستقيمات ويحقق نفس بديهيات المستوي الأسقاطي من (١ –٤) وهي

1 .أي نقطتين مختلفتين في **π** يحتويهما مستقيم واحد فقط .

2 . كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل.

3. يوجد في الأقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الأقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان $\ell \not\ni A$.

4. أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل.

مبرهنـــة (3): اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مســتقيـم لمســتوى اسقاطي منتهي فأن المستوى يحتوي بالضبط على $n^2- n +1$ من النقاط.

نتيجة مبرهنه (3) اذا كان في المستوى الأسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم اخر في نفس المستوي يحتوي بالضبط على n من النقاط ايضاً.

ملاحظة :

1. تقدم مبرهنه (3) (قانون لأحتساب عدد نقاط المستوي الأسقاطي المنتهي **π** وهو ان المستوى الأسقاطي المنتهي يحتوي بالضبط على **$n^2- n +1$** من النقاط ، حيث n يمثل عدد نقاط المستقيم في المستوي الأسقاطي المنتهي.

2. اما نتيجة مبرهنة (3) تقدم قانون لأحتساب اي مستقيم في مستوي اسقاطي منتهي يحتوي n من النقاط فأن أي مستقيم اخر في نفس المستوي الأسقاطي يحتوي ايضا n من النقاط.

المستوى التألفي **Plane Affine**

يتكون المستوى التألفي α من مجموعة من الكلمات اولية تقنية [تدعى نقاط ونرمز لها بالحروف الكبيرة C,B,A..ومستقيمات ونرمز لها بحروف صغيره مثل ℓ , m.....] وتحقق نفس بديهيات المستوى الأسقاطي (1,2,3).

امـــا البديهـــية(4) فهي اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث $\ell \not\ni A$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$.

تعريف: (توازي المستقيمين)

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان اذا كان $\ell \cap m = \emptyset$ من تعريف التوازي يمكن ان نعيد نص بديهية (4) بالشكل التالي اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $\ell \not\ni A$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمرمن A ويوازي ℓ.

من اعلاه نجد ان بديهيات المستوى التالفي هي

1. أي نقطتين مختلفتين في α يحتويهما مستقيم واحد فقط.

2. كل مستقيم في α يحتوي على ثلاث نقاط في الأقل.

3. يوجد في الأقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الأقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان $A \notin \ell$.

4. اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمر من A ويوازي ℓ.

مبرهنة (4): اي مستقيمين مختلفين في مستوى تألفي يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر.

البـــرهــان :

ليكن ℓ , m مستقيمين مختلفين في المستوي التالفي α أي ان $\ell \neq m$

المطلوب اثباته: ان المستقيمين ℓ , m يشتركان في نقطه واحده على الأكثر لو فرضنا ان المستقيمان ℓ و m يشتركان في نقطتين في الأقل ولتكن P,Q .

البديهية (1) [أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط] ينتج من هذا بأن $\ell = m$ وهذا تناقض (لكون ℓ , m مستقيمين مختلفين)اي مستقيمين في مستوى تالفي يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر أي ان أي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبــرهنـــة (5) في المستوى التألفي اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فأنه يجب ان يقطع الأخر.

البـــرهــان:

ليكن ℓ, k مستقيمين متوازيين في المستوى التألفي α وان m مستقيم اخر يقطع k في نقطة مثل A.

يجب ان نبرهن ان المستقيم m يقطع ℓ .

لو فرضنا ان المستقيم m يوازي ℓ فأنه من A سيكون هنالك المستقيمان k, m يوازيان ℓ وهذا يخالف البديهية (4) اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمر من A ويوازي ℓ بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$ لذلك المستقيم m لا يمكن ان يوازي ℓ وبهذا يكون m يقطع ℓ .

المستوى التألفي المنتهي

هو نفسه المستوي التالفي ولكن يحتوي على مجموعة منتهية (من النقاط والمستقيمات) تحقق نفس بديهيات المستوي التالفي من (4-1).

مبرهنة (6) في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط أيضاً.

س١ /اذا كان ℓ و m مستقيمان متوازيان في المستوى التألفي المنتهي وكان المستقيم ℓ يحتوي بالضبط (10) نقاط فكم نقطة يحتوي المستقيم m .

ألجواب : من مبرهنة (6) في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم مثل ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط ايضاً. وبما ان المستقيم m يوازي المستقيم ℓ نستنتج من (مبرهنه 6) أن المستقيم m يحتوي بالضبط على 10 نقاط أيضاً.

مبرهنة(7) أذا كان ℓ مستقيماً في مستوي التألفي المنتهي يحتوي بالضبط على n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ .

س٢/ اذا كان ℓ مستقيم في المستوى التألفي المنتهي يحتوي بالضبط على (14) نقطة فكم مستقيم يوازي ℓ .

الجواب :من مبرهنة(7) أذا كان ℓ مستقيماً في المستوي التألفي المنتهي يحتوي بالضبط على n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ أذن نستنتج من مبرهنة (7) ان عدد المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ هو13=1-14=n-1