جـــــامعة تكـــــريت
كلية التربية للبنات قسم الرياضيات

المادة: الهندسة

المرحلة الثانية

الموضوع : أسس الهندسة

مدرس المادة : م.م فاتن هيثم مولود

الأيميل **Fatin.Haitham@tu.edu.iq**

اسس الهندسة

قدم عالم الرياضيات الالماني دافيد هلبرت نظاما بديهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس .

نبدأ نظامنا هذا بكلمات أولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرموز C,B,A,... ومستقيمات يرمز لها بالرموز n, m, l

بديهيات الوقوع والوجود

بديهية (١) لكل نقطتين مختلفتين معلومتين يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما .

بديهية (٢) كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل .

بديهية (٣) لكل مستقيم معلوم توجد في الاقل نقطة واحدة لا تنتمي اليه.

بديهية (٤) يوجد في الاقل مستقيم واحد.

يتبين لنا من البديهيات أعلاه ان المستقيم هو مجموعة من النقاط غير ان هذا لا يعتبر تعريفا للمستقيم لان أي شكل في الهندسة هو مجموعة من النقاط لكن هذا يوضح العلاقة بين النقطة و المستقيم ويساعدنا في توضيح ماذا نعني بالمستقيمات المتساوية او المختلفة .

تعريـف (١): تكون المجموعتان متساويتين اذا وفقط اذا احتوت بالضبط على نفس العناصر .

مبرهنـــة (١): توجد في الاقل ثلاث نقاط في النظام .

البرهان : يستنتج مباشرة من البديهيات ٢ و ٣ و ٤ (واجب).

مبرهنة (٢): أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر (البرهان واجب).

ملاحظة : يمكن ان يعبر عن البديهية (١) بقولنا ان الخط يتعين بنقطتين .

بديهيات الترتيب **Axioms of Order**

ان بديهيات الوقوع والوجود ليست كافية لاشتقاق بعض المبرهنات المعروفة في الهندسة الاقليدية وليست كافية لوجود اكثر من نقطتين على خط و لا وجود عدد غير منتهي من النقاط على الخط ولا تتضمن وجود عدد غير منته من النقاط بين أي نقطتين ولا يمكن ان نتكلم عن نقطة بين نقطتين ولا يمكن ان نتكلم عن قطعة مستقيم او المقارنة بين القطع أيهما الاكبر او الاصغر كل هذا يأتي من العلاقة (بين) فقد اهمل اقليدس هذه العلاقة في بديهياته لكنه استنتجها من الرسم لكن هذا لا يعني اننا لا نستخدم الرسم غير انه لا يكون جزءا من البرهان.

قاعـــدة لغـويـة : " بين "هي كلمة أولية تقنية ويرمزللعبارة (B تقع بين A وC) بالرمز A-B-C.

مجموعة البديهيات :

بديهية(٥): A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A .

بديهية(٦): اذا كان A-B-C فان النقاط A,B,C مختلفة وتقع على مستقيم واحد .

بديهية(٧): اذا كانت C,B,A أي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد فان واحدة فقط مما يلي تتحقق A-B-C , B-C-A , C-A-B .

رمـــز: الرمز A-B-C-D هومختصر الى A-B-C , A-B-D , A-C-D , B-C-D وبنفس الطريقة بالنسبة لأكثر من اربع نقاط .

بديهية(٨): اذا كانت A,B,C,D أربعة نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحدة فقط مما يلي تتحقق: اما D-A-B-C او A-D-B-C او D-A-B-C او A-B-C-D.

بديهية(٩): اذا كانت A,B أي نقطتين فان:

١ -توجد نقطة C بحيث ان A-B-C.
٢ -توجد نقطة D بحيث ان A-D-B.
٣ -توجد نقطة E بحيث ان E-A-B.

مبرهنة (٣):

١ -اذا كان A-B-C , A-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
٢ -اذا كان A-B-D ,B-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
٣ -اذا كان A-B-C , B-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

برهان (١): من بديهية (٦) بما ان A-B-C فان النقاط A,B,C مختلفة وعلى مستقيم واحد وكذلك بما ان A-C-D فان النقاط A-C-D مختلفة وعلى مستقيم واحد. اذا كان D = B فان بتعويض ذلك في A-C-D يؤدي الى ان A-C-B (ولكن من الفرض A-B-C) وهذا يناقض بديهية (٧) لذلك فان النقاط A,B,C,D تكون مختلفة.

من بديهية (١) يوجد مستقيم واحد فقط يتعين من A,C بما ان B,D تقعان على المستقيم AC فان A,B,C,D تقع على مستقيم واحد.

مبرهنة (٤):

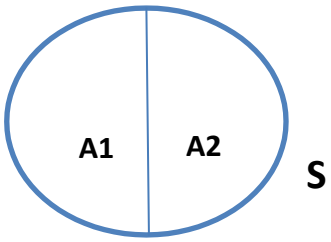
١ -اذا كان A-B-C , A-C-D ← A-B-C-D.
٢ -اذا كان A-B-D , B-C-D ← A-B-C-D.
٣ -اذا كان A-B-C , B-C-D ← A-B-C-D.

برهان (١): من مبرهنة (٣) A-B-C , A-C-D ← A,B,C,D مختلفة وعلى استقامة واحدة وبما ان C-B-A فانة من بديهية (٨) تتحقق واحدة فقط مما يلي:

D-A-B-C , A-D-B-C , A-B-D-C , A-B-C-D بما ان A-C-D فانه من بديهية (٧) لا تتحقق كل من A-D-C وكذلك D-A-C ومن هذا نستنتج انه لا تتحقق كل من A-B-D-C , A-D-B-C , D-A-B-C لذلك تتحقق فقط A-B-C-D .

تعريف (٢):

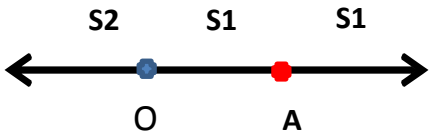
اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين او اكثر جزيئتين غير خاليتين A_1 , A_2 بحيث ان كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية فانه يقال A_1,A_2 تكونان تجزئة للمجموعة S .



تعريف (٣): لتكن O أية نقطة على مستقيم m , A نقطة أخرى على m . لتكن S_1 مجموعة كل النقاط على m من ضمنها A وكل النقاط X بحيث ان O-A-X او X-O-A ولتكن S_2 مجموعة كل النقاط X بحيث ان O-A-X فان S_1 , S_2 تدعيان جهتي O على m و تدعيان أيضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O أي ان:

$S_1 = \{ x \in m : O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X=A \}$

$S2 = \{ x \in m : X - O - A \}$



يقال عن المجموعتين S_1 , S_2 أنهما تتعينان من A , O .

مـبرهـنة (٥): جهتا النقطة O على المستقيم m لا يحتويان على O

المعطيات: يوجد مستقيم m و توجد نقطة O على m .

المطلوب اثباته: جهتا النقطة O على المستقيم m لا يحتويان علىO.

البـرهان: نفرض ان $S_1 \in O$ وبما ان $A \neq O$ فان O-O-A او O-A-O وهذا يخالف بديهية (٦) وكذلك اذا كان $S_2 \in O$ فان O-O-A لذا فأن O لا تنتمي الى جهتي O .

تعريف (٤): لتكن S_1 , S_2 مجموعتين مختلفتين غير خاليتين ومنفصلتين و كلا منهما منفصلة عن مجموعة S ويتحقق الشرطان التاليان:

١ - لأي عنصر A في S_1 , B في S_2 توجد نقطة في S بين A , B .
٢ - لأي عنصرين A,B من نفس المجموعة لا توجد نقطة في S بينهما فانه يقال بأن S تفصل بين S_2 وS_1 .

مبرهنة (٦): أية نقطة O على مستقيم m تفصل m الى جهتين بالنسبة الى O وتكونان مع O تجزئه للمستقيم m .

مبرهنة (٧): لتكن A , O , A' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m , جهتا النقطة O على المستقيم m المتعينتين من A , O هما نفس الجهتين المتعينتين من A',O.

مبرهنة (٨): لتكن O,O' نقطتين مختلفتين على مستقيم m جهتا النقطة O على المستقيم m تختلفان عن جهتي النقطة O' على m .