جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات

محاضرة بعنوان

(الزمرة)

اعداد الأستاذة:
م. ندى جاسم محمد

مقدمة

الجبر المجرد : هو فرع في الرياضيات يهتم بدراسة الخواص العامة للعمليات الرياضية مثل الجمع والضرب والتجميع والتحويل والمعادلات . يستخدم الجبر المجرد المفاهيم المجردة والرموز لتمثيل العمليات الرياضية والتلاعب بها بغض النظر عن العناصر المحددة التي تتكون منها هذه العمليات .

آس الجبر : **تتضمن آس الجبر المجرد المجموعات والعلاقات بين العناصر والخواص الأساسية للعمليات الرياضية مثل الإغلاق والتوافق والمراوغة والتوزيع**

س / ما هي مبادئ الجبر المجرد

1- القواعد الأساسية **2-** الهوية الجبرية

3- العكس الجبري **4-** العمليات التكرارية

س / ما هو الشرط المجرد

وهو شرط يعبر عن حقيقة أو حالة غير حقيقية في الواقع ويمكن استخدامه لوصف أمور مثالية أو مفترضة أو مستقبلية .

*مفهوم الزمرة

نقول عن البنيه (G,*) انها زمرة اذا كانت تجميعية وتمتلك حيادي ولكل عنصر منها نظير فيها . اي انها تحقق

$$1- x*(y*z)=(*yx)*z:\forall x, y , z \in G$$

$$2- *e\, x= e* =xx \,.\, \forall x\in G , \exists\ e \in G$$

$$3- (\exists \in x^{-} G: x^{-} * x=x^{-*}\, x * *e ,\ \in Gx$$

واذا كانت الزمرة تحقق شرط التبديليه , اي

$$\forall x, y\in G : *y\, x = Y*x$$

سندعو (G,*) زمرة تبديلية او تبادليه نسبه الى الرياضي النروجي ***Abel***

وسنقول ان الزمرة(G,*)غير تبدلية اذا وجد عنصران

$$G \ni x, y \longrightarrow *yx \neq Y *x$$

*وفي حال الكتابة الضربية سندعو (*G,.*) زمره ضربية وسنرمز *x y*. لناتج تشكيل العنصرين *1,x,y* للحيادي x^{-1} لنظير *x*

*وفي حاله الكتابة الجمعية (نستخدم غالبا الزمرة التبديلية) سندعو (*G,+*) زمره تجميعية وسنرمز *x+y* لناتج تشكيل العنصرين *x,y*, *0* للحيادي , *-x* للنظير *x*

وسنقول ان الزمره *G* منتهية اذا كانت مؤلفة من عدد منتهي من العناصر وفي خلاف ذلك سندعوها زمره غير منتهية

Definition: The group

The pair(G,)is agroup if and only if(G,*)is semi group with identity in which each element of G has an inverse.*

Or

Definition: The group

A group is a pair (G, *) consisting of nonempty set G and binary operation * defined on G sat is fiying the following

1- The binary operation * is associative

$$(a*b)*c = a*(b*c)\ \forall a,b,c\epsilon G$$

2- There is an element eϵG such that

$$a*e=e*a=a\ ,\forall a\epsilon G$$

This element e is an identity element for

On G $, \exists e\epsilon G\ .s.t\ a*e=e*a=a\ \forall a\epsilon G$

3-For each aϵG there is an element for *on such that

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

The element a^{-1} is an inverse of a $\forall a\epsilon G, \exists\ a^{-1}\epsilon\ G\ s.t\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

Example: Let G = z,a*b =a+b+2,show that (G,*) is a comm. Group

sol/1- closure:Let a,b,ϵ z then a*b =a+b+2ϵz $\longrightarrow$ closure is true.

2-Asso .Law :Let a ,b ,c ϵ z then

a*(b*c) =a*(b+c+2)=a+(b+c+2)+2=a+b+c+4....... -1

(a*b)*c = (a+b+2)*c= (a+b+2)+c+2

a+b+c+4..... -2

∴ (1) = (2) ⟶ *is asso

3- identity :Let eϵ z s.t a*e = e *a = a the

A*e=a+e+2+a → e+2=0   e=-2

∴ e=-2 since a*-2 =a +(-2)+2=a

4-inverse: a , b ϵ z ∋ a*b=b*a=e

a*b=a+b+2=-2 → b=-a-4

b*a=b+a+2=-2 → b=-a-4

(a+4)ϵ z since a*-(a+4)   ∴ $a^{-1} = -$

⟶ a+(-(a+4)+2=-2=e   ∴(G,*) is group

5-comm.Toprove . a*b=b*a $\forall\, a, b\epsilon\, z$

A*b=a+b+2=b+a+2=b*a

$\therefore$(G,*) *Is a comm. Group*

Remark

1-Every group is asemi group but the converse is not true as in the following example shows.

2-(N,+)is a semi group but not group because

$$\nexists\ \epsilon \mathbf{N}\ \forall\ a\epsilon N\ for\ ex.a^{-1}$$

$$5\ \epsilon\ N\ but\ 5^{-1} = -5 \notin N$$

Example :Let R be aset of real number and "."

Is a usual multiplication on R .show that (R/{0})is an abelian group

Sol/1-R/{0}≠Øis anon-empty set

2-Let a,b∈R/{0}

→ *a≠0,b≠0 then a.b≠0*

→ *a.b∈R/{0}*

R/{0} is closed under"."

i.e\R/{0}xR/{0}R/{0} such that

· (a.b)=a.b
,∀a,b∈R/{0}

so "." is abinary operation on R/{0}

3-Let a.b,c∈R/{0}then

a.(b.c)=(a.b).c

→ *(R/{0})is semi-group*

4-since 1 ϵ R/{0}and l.a=a.l,$\forall$aϵR/{0} Then ,e=1 ,eϵR/{0}

OR

*Let aϵR/{0}and a*e=a*

a.e=a *a=* $\frac{a}{a}$*=1 and*

$\longrightarrow$ *e*a=e.a=1.a=a*

*:a*e=e*a=a*

5-Let aϵR/{0} since a$\neq$0 $\frac{1}{a}\neq 0$

ϵR/{0}and$\frac{1}{a}$

a.$\frac{1}{a}$*=* $\frac{1}{a}$*.a=1=e*

OR

Let aϵR/{0} and aa^{-1}=e*

a.a^{-1} *=1* a^{-1} $\frac{1}{a}$=

Theorem: Let (G,*)be agroup then The identity element is unique

T.P unique identity

Let e1,e2 be two identity element

e1*e2=e2*e1=e1…-1

e2*e1=e1*e2=e2….-2

:1 = 2

:identity element is unique.