جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات

محاضرة بعنوان

(تمديدات الزمر)

اعداد الأستاذة:
م. ندى جاسم محمد

2.4 تمديدات الزمر

2.4.1 مقدمـــة : فـــي نظريـــة الزمـــر، زمـــرة قابلـــة للحلحلـــة هـــي زمـــرة يمكـــن إنشاؤها بواسطة زمر أبيلية باستعمال التمديدات

تكـون زمـرة مـا قابلـة للتمديـد إذا كانـت تقبـل سلسـلة مـن زمـر جزئيـة كـل واحـدة داخـل سـابقاتها تبـدأ مـن الزمـرة وتنتهـي عنـدالزمرة المحايـدة وعواملهـا زمـر تبادليـة. هـذا تعريـف يكـافئ أن سلسـلة الزمـر المشـتقة منتهيـة وتسـتقر عنـد الزمـرة المحايدة.[14]

جميـع الزمـر التبادليـة هـي زمـر قابلـة للتمديـد وكـل زمـرة عـدد عناصـرها قـوة عدد أولي بل يكفي أن يكون عددا فرديا حسب مبرهنة فايت-تومسون.

تنص مبرهنة بورنسايد على أنه إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها

$$p^a q^b$$

حيـث p و q عـددان أوليـان وحيـث a و b عـددان صـحيحان موجبـان، فـإن G قابلة للحلحلة.

كل زمرة عدد عناصرها يساوي قوة عدد أولي هي قابلة للحلحلة.

2.4.2 مفهوم تمديدات الزمر (Extensions of groups)

ان المتتالية من الزمر و التشاكلات[15]

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} 1$$

تكون تامة إذا كان i متباينا، و p غامرا، و Ker (p) = Im(i)لذلك (N) زمرة جزئية ناظمية في G

تماثل بالنسبة ل i للزمرة(N) Q $\longrightarrow$ G/ I(N) غالباً ما نطابق N مع الزمرة الجزئية I (N) في G و Q مع زمرة القسمة G /(N)

إن المتتالية التامة السابقة تشير أيضا بأنها تمثل تديدا (Extension)للزمرة Q بالزمرة N وأيضا تشكل تمديدا للزمرة Nبالزمرة Q عند بعض المؤلفين). يكون التمديد مركزيا (central) إذا كان $I(N) \subset Z(G)$ مثلا، الجداء شبه المباشر $N \times_q Q$ يتحول إلى تمديد للزمرة Q بالزمرة N [15]

$$1 \to N \to N \times_q Q \to Q \to 1$$

الذي يكون مركزيا إذا وفقط إذا كان q و تشاكلا تافها.

يقال عن تمديدا الزمرة Q بالزمرة N انهما متماثلان إذا وجد مخططا تبادلياً

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

يقال بأن تمديدQ بـ N

منفصلا (split)إذا كان متماثلا مع التمديد المعرف بالجداء شبـه المباشر $N \times_q Q$

الشرطان الأتيان متكافئان:

a) يوجد زمرة جزئية $Q' \subset G$ بحيث إن p يعطي التماثل $Q' \to Q$

b) يوجد تشاكل $s : Q \to G$ بحيث يكون $p \circ s = id$

في الحالة العامة، لن يكون التمديد منفصلا، مثلا، التمديد

$$1 \to N \to Q \to Q/N \to 1$$

حيث N اي زمرة جزئية من التربة 4 في الزمرة الرباعية Q

$$1 \to C \to C \to C \to 1$$

ليس منفصلا، تستعرض قاعدتين لكي يكون التمديد منفصلا.[16]

2.4.3 تصنيف جميع تمديدات الزمر المنتهية

أصبح معروفا لنا الكثير عن تمديدات الزمر المنتهية، فمثلا، تمديد زمرة بسيطة واحدة بزمرة أخرى، علاوة على ذلك، كتب Solomon (2001, p347) :

إن تصنيف كل الزمر المنتهية غير قابل للتطبيق بشكل تام. ولا توجد خبرات سابقة تبين بأن معظم الزمر المنتهية التي توجد في "الطبيعة" ... تكون "مغلقة" إما بالنسبة للزمر البسيطة أو بالنسبة لزمر ما كزمر ديهيدرال، وزمر هيسينبيرغ، الخ...، والتي تأتي بشكل طبيعي في دراسة الزمر البسيطة. كما لاحظنا قبل ذلك، في عام 2001، قائمة كاملة صحيحة من الزمر المنتهية كانت متوفرة فقط من أجل الزمر التي رتبتها تصل إلى 2000 تقريبا، وعدد الزمر في القائمة عامر . نلاحظ بأن حلم تصنيف الزمر البسيطة المنتهية يرجع على الأقل إلى 1892 Holder.

لكن الإستراتيجية الواضحة لتحقيق هذه لم تبدأ بالظهور حتى عام 19508، عندما عمل بروبيسر و مقترحون آخرون على أن المفتاح يكمن في دراسة ممركزات العناصر من الرتبة 2 (الممركزات الالتفاقية). مثلا، بروبير و فوليير (1995) بينا بأنه، من أجل أي زمرة منتهية H، تكون محددات الزمر البسيطة المنتهية مع ممركز التفافي متماثل مع H هو مسألة منتهية. [17]

فيما بعد عمل مبيناً بأن المسألة سلسة للغاية، ولذلك أصبحت الإستراتيجية:

a) إن قائمة الزمر H،التي يمكن أن تعتبر كممركزات الثقافية لبعض الزمر البسيطة المنتهية،
b) و لكل زمرة Hفي (a) قائمة الزمر البسيطة المنتهية للزمرة Hالتي تعتبر كممركز الثقافي. هذا يقترب بتطبيقه فقط على الزمر البسيطة المنتهية الحاوية على عنصر من الرتبة 2، لكن هناك تخمين قديم يقول بأن، كل زمرة بسيطة منتهية رتبتها عدد زوجي وبالتالي تحوي على

عنصـــر مـــن الرتبـــة 2. وذلـــك حســـب مبرهنـــة كوشـــي (13.4) ماعـــدا الزمـــر الدائريـــة التـــي رتبهـــا عـــددا أوليـــا، مـــع برهـــان هـــذا التخمـــين مـــن قبـــل فيـــت وثومبســـون (1963)، إن الجهـــد الـــذي بـــذل لإكمـــال تصـــنيف الزمـــر البسـيطة المنتهيـــة بـــدأ بجديـــة. لقـــد أعلـــن التصـــنيف التـــام عـــام 1982، ولكـــن مـــازال غيـــر موثـــوق بـــه، لأن البرهـــان عليـــه اعتمـــد علـــى آلاف مـــن الصـــفحات فـــي أجـــزاء مـــن الصـــحف التـــي نـــادرا مـــا تقـــرأ، وفـــي الحقيقـــة، وأثناء صياغة البرهان، كالعادة ، اكتشفت ثغرة.

فتوقفـــوا عنـــد هـــذا الحـــد، ومـــع منشـــورات Aschbacherو 2004 Smith أصـــبح بشـــكل عـــام مقبـــولا لـــدينا بـــأن برهـــان تصـــنيف الزمـــر أمـــر معقـــد حقـــا. [17]

2.4.4 مبرهنة (Schur – Zassenhaus)

إن تمديد الزمر المنتهية التي رتبها أعداد أولية نسبيا يكون منفصلاً

البرهان :، Rotman 1995:

لتكن N زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G، إذا كانت Nتامة، عندئذ فان

N جداء مباشر للزمرة Nمع ممركز N في G

$$C_G(N)\overset{def}{=}\{g\in G\,|\,gn=ng\ ,\ \forall n\in N\}$$

تلاحظ فيما يلي بأن كل عنصر من NIQ ينتمي إلى مركز N، الذي يكون تافها لان N(تامة)، وبالتالي NIQ = 1

البرهان :

لتكن

Q=CG(N) سنبين بان N وQ تحقق شروط المبرهنه

أخيرا، لأي عنصر gn=ng

نلاحظ اولا بانه:

N تمثيل ذاتي للزمرة G ∋g لكل $g = gng^{-1}$: $N \to N$

ولان N تامة يجب ان يكون التماثل الذاتي الداخلي معرفا بعنصر g في N لهذا :

$$gng^{-1} = gng^{-1} \text{ ،لكل } n \in N$$

تبين المعادلة السابقة بان $g= g(g\text{-}1g)\in NQg\text{-}1g\in Q$ وبما انه g اختياري نكون قد بينا بان $G=NQ$

نلاحظ فيما يلي بانكل عنصر $N\cap Q$ من ينتمي على مركز N الذي يكون تافها لان N تامة وبالتالي فان $N \cap Q=1$.

اخيرا لكل عنصر $g=nq\in G$

$$gQg^{-1} = n\left(qQq^{-1}\right)n^{-1} = Q$$

تذكر بأن كل عنصر من Nيتبادل مع كل عنصر منQ لذلك فإن Q ناظمية فيG

ان التمديد

$1\to N\to G \to Q \to 1$

يعطي التشاكل $q':G \to Auto(N)$ ، وبالتحديد،

$$q'(g)(n) = gng^{-1}$$

$\hat{g}$ Q∈G يسرل الى q في Q وفق التطبيق Q عندئذ الصورة q=q' في (Aut (N)Inn(N تعتمد على Q فقط لذلك تحصل على التشاكل

$q:Q\to Out(N)\ Aut(N)/Inn(N)$

يعتمد التطبيق q فقط على الصفوف المتماثلة للتمديدات، وتكتب q(Ext' (Q ,N لمجموعة الصفوف المتماثلة لمجموعه التمديدات مع Q لقد درست هذه المجموعات على نطاق واسع عندما تكون Nو Q تبديليتين و q تافها تكون الزمرة G تبديلية ايضا وتوجد زمرة تبديلة تبنى فوق(Ext' (Q ,N.

علاوة على ذلك فان االتشاكلات الذاتية للزمرتين Nو Q تؤثر كتاثير التشاكلات الذاتية على (Ext' (Q ,N كحال خاصة بالضرب m فوق N او Q ينتج بالضرب ب m فوق (Ext' (Q ,N. لهذا اذا كانت Nو Q مختزلتين فوق m,n على الترتيب عندئذ (Ext' (Q ,N يكون مختزلا على m,n وبالتالي يكون مختزلا على gcd (m,n) .

هذا يثبت مبرهنه (Schur – Zassenhaus) في هذه الحالة .[18]