جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات

محاضرة بعنوان
(الحلقة الجزئية)

اعداد الأستاذة:
م. ندى جاسم محمد

١ - الحلقات الجزئية

(٢-١) تعريف

الحلقة الجزئية (subring) من حلقة R هي مجموعة جزئية S من R تشكل حلقة تحت تأثير نفس العمليات التي ورثتها من R.

ماذا يعني التعريف المذكور أعلاه؟ يعني أولا، أن العمليات على R تحدد العمليات على S. في حالة الجمع، على سبيل المثال، إن قيد التطبيق $R \times R \to R$ المعرف بـ $(a, b) \to a + b$ على $S \times S$ يجب أن يعطي تطبيقا من $S \times S$ إلى S؛ أي أنه إذا كان a, b عنصرين من S فإن $a + b$ يجب أن ينتمي إلى S. بالمثل $-a$ و ab ينتميان إلى S. وعليه فإن $a-b = a + (-b)$ ينتمي إلى S. ونشير إلى نقطة أخرى قد تغيب عن البال، وهي أنه لما كانت S تشكل بالنسبة لعملية الجمع زمرة فإنها يجب أن تكون غير خالية. لذلك نكون قد أثبتنا نصف المأخوذة التالية.

(٢-٢) مأخوذة

إذا كانت S مجموعة جزئية من حلقة R فإن S تكون حلقة جزئية من R إذا، وفقط إذا كان

(i) S غير خالية

(ii) طالما كان $a, b \in S$ فإن $ab, a - b \in S$

البرهـــان

لقد أثبتنا أن الشروط السابقة ضرورية. سنثبت الآن أنها كافية. لما كانت S غير خالية، فإنها تحوي عنصرا وليكن a وبالتالي فإن $a - a = 0$ ينتمي إلى S. وعليه فإن $0 - b = -b$ ينتمي إلى S وبالتالي $a + b = a - (-b) \in S$. لذلك فإن العمليتين الثنائيتين والعملية الأحادية على R تولد عمليات مناظرة على S. كما يلاحظ أن قانوني الإبدال والتجميع صحيحان بالنسبة لعملية الجمع على S بالوراثة من R؛ لأنه إذا جمعنا عناصر من S، فيمكن النظر إليها كعناصر من R. وإذن S زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع والمحايد الجمعي هو 0. يلاحظ أن قانون التجميع صحيح بالنسبة لعملية الضرب، وأن قانوني التوزيع صحيحان على S بالوراثة من R، وإذن S حلقة.

أمثلة

١ - يلاحظ أن كلا من $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ تشكل مع العمليات الاعتيادية حلقة جزئية من التي تليها.

٢- يلاحظ أن حلقة المرباعيات والتي سبق أن نوقشت في مثال حلقة (٩) تشكل حلقة جزئية من $M_2(\mathbb{C})$.

٣ - تشكل مجموعة كل المصفوفات من النوع $n \times n$ على الحقل K والتي تكون جميع عناصرها تحت القطر أصفارا، حلقة جزئية من $M_n(K)$.

سنحتاج الآن أن نقدم قدرا معينا من الرموز المفيدة، البعض منها مألوف والبعض الآخر قد لا يكون مألوفا.

١ - عندما نتعامل مع الحلقة R، من المفيد غالبا أن نفكر في R كزمرة تحت تأثير البنية الجمعية التي تملكها متجاهلين بنية الضرب . عندما نركز على ذلك سنكتب R^+ بدلا من R، وتسمى R^+ الزمرة الجمعية (additive group) للحلقة R. نلاحظ أن R ترمز إلى نظام يحوي مجموعة وعمليتين ثنائيتين وعملية أحادية على هذه المجموعة وعنصرا مختارا من المجموعة، بينما ترمز R^+ إلى نفس النظام مع حذف عملية الضرب. غالبا ما تسمى الزمر الجزئية من R^+ بزمر جمعية جزئية (additive subgroups) من R. وعلى ذلك فإن الزمرة الجزئية الجمعية من R هي مجموعة جزئية S من R تحتوي على 0 وتحقق الشرط أنه إذا كان $a , b \in S$ فإن $a - b \in S$.

٢ - إذا كانت A زمرة إبدالية جمعية، وكان $a \in A$، وكان n عددا صحيحا فإن na يعرف كما يلي:

إذا كان $n > 0$ $\quad na = a + \dots + a$ (n من المرات)

$$0a = 0$$

إذا كان $n < 0$ $\quad na = (-n)(-a) = -(a + \dots + a) = -(|n|\, a)$

إذا كان $a, b \in A$ وكان n, m عددين صحيحين فإن:

$$n(a + b) = na + nb$$

$$(n + m)\, a = na + ma$$

$$(nm)\, a = n(ma)$$

$$1a = a$$

نود أن نشير إلى أنه قد تكون الحقائق البسيطة المذكورة آنفا مألوفة لدى القارئ وإذا رغب الاطلاع على إثباتها، فعليه الرجوع إلى أي كتاب في مبادئ نظرية الزمر.

نستطيع، بصفة خاصة، أن نعتبر A هي الزمرة الجمعية R^+ لأي حلقة R، ولذلك فإن التعاريف المذكورة أعلاه صحيحة في أي حلقة R . ومن الضروري التفريق بين العملية $(n, a) \to na$ والضرب في الحلقة؛ لأنه لا يمكن اعتبار n عنصرا من R بصفة عامة.

من ناحية ثانية، يمكن أن يحدث في بعض الأحيان أن تتطابق $\mathbb{Z}$ مع حلقة جزئية من R إلى الحد الذي يجعل العدد الصحيح 1 يؤدي دور المحايد الضربي في R . في هذه الحالة، إذا كان $n > 0$، فإنه باستخدام قانون التوزيع:

$$na = (1 + \dots + 1)\, a = a + \dots + a$$

لذلك فإنه في هذه الحالة يكون للرمز na نفس المعنى إذا اعتبرناه حاصل ضرب عناصر أو اعتبرناه حسب التعريف السابق. وبنفس الطريقة يمكن اعتبار $a, 0a$ $(-n)$. وهكذا فإنه لا يوجد احتمال حدوث أي لُبس.

إذا كان a عنصرا من حلقة R وكان n عددا صحيحا موجبا فإن

$a^n = a \dots a$ (n من المرات).

أيضا، إذا كان $n, m > 0$ فإنه يلاحظ أن:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad , \quad a^{nm} = (a^n)^m$$

إذا كانت R حلقة بمحايد فإننا نعرف $a^0 = 1$ حيث $0 \neq a \in R$، كما أن المتطابقات المشار إليها تبقى صحيحة.

٣ – نفرض أن T و S مجموعتان جزئيتان غير خاليتين واختياريتان من حلقة R. نعرف:

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$$

$$ST = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i t_i : s_i \in S, t_i \in T, n = 1, 2, \dots \right\}$$

لنركز بشكل خاص علي الحالة التي تكون فيها كل من S, T زمرة جمعية جزئية من R، وقد عرف المجموع والجداء لزمرتين جمعيتين جزئيتين بهذه الطريقة حتى يكون كل منهما زمرة جمعية جزئية.

(٢–٣) مأخوذة

إذا كانت R حلقة، وكانت U، T و S مجموعات جزئية غير خالية من R، فإن:

(i) $(S + T) + U = S + (T + U)$، $(ST)U = S(TU)$

(ii) *إذا كانت T و S زمرتين جزئيتين جمعيتين من R فإن كلا من $S + T$ و ST تكون كذلك.*

(iii) إذا كانت T و S حلقتين جزئيتين من R، وكانت R إبدالية، فإن ST حلقة جزئية من R.

البرهـــان

(i) من الواضح أن $(S+T)+U=S+(T+U)$. لما كانت ST تحوي كل المجاميع المنتهية من العناصر التي على الشكل st، حيث $t \in T$ و $s \in S$، فإن ST مغلقة بالنسبة للجمع، وهكذا فإن $(ST)U$ و $S(TU)$ مغلقتان أيضا بالنسبة للجمع.
إذا كان z عنصرا اختياريا من $(ST)U$ فإن z هو مجموع منته لعناصر على الشكل xu حيث $u \in U$ و $x \in ST$. لذلك فإن x مجموع منته من عناصر على الشكل st حيث $t \in T$، $s \in S$، وبالتالي فإن z هو مجموع عناصر على الشكل $(st)u$.
لما كان $(st)u=s(tu)$، فإن هذه العناصر جميعها تنتمي إلى $S(TU)$. لكن $S(TU)$ مغلقة بالنسبة للجمع لذلك فإن $z \in S(TU)$. وإذن $(ST)U \subseteq S(TU)$.
والعكس يمكن إثباته بطريقة مماثلة.

(ii) إذا كان $x, x' \in S+T$. فإن $x'=s'+t'$ و $x=s+t$ حيث $t, t' \in T$ و $s, s' \in S$. لذلك $x-x'=(s-s')+(t-t') \in S+T$ لأن S, T زمرتان جمعيتان. علاوة على ذلك فإن 0 ينتمي إلى S وينتمي إلى T، وبالتالي $0=0+0 \in S+T$ وإذن $S+T$ زمرة جمعية جزئية من R.
نعتبر الآن ST. لقد لاحظنا أنها مغلقة بالنسبة للجمع. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $y=\Sigma s_i t_i \in ST$ فإن $-y=\Sigma(-s_i)\, t_i \in ST$ لأن $-s_i \in S$. لما كان من الواضح أن ST تحوي 0، فإنها تشكل زمرة جمعية جزئية من R.

(iii) لقد سبق ملاحظة أن ST زمرة جمعية جزئية من R. لذلك يكفي أن نثبت أن ST مغلقة بالنسبة للضرب. حاصل الضرب:

$$\left(\sum_i s_i\, t_i\right)\left(\sum_j s'_j\, t'_j\right) = \sum_{i,\, j}\left(s_i\, s'_j\right)\left(t_i\, t'_j\right)$$

لأن R إبدالية، وبالتالي فإن حاصل الضرب هذا عنصر من عناصر ST.