جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

الاعداد العقدية

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

((المحاضره : الأولى))

الأعداد العقديه (Complex Numbers)

العدد العقدي : يعرف العدد العقدي(المركب) بأنه الزوج المرتب (x, y) ويرمز له عادة بالرمز z
ويكتب بالشكل $z = x + iy$
حيث $i = \sqrt{-1}$ أو $i = (0,1)$ وعليه نسمي x بالجزء الحقيقي للعدد z ويرمز له بالرمز $x = Re\, z$
أما y فيمثل الجزء الخيالي للعدد z ويرمز له بالرمز $y = Im\, z$ وهي أعداد تنتمي إلى حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
أما مجموعة الأعداد العقدية(المركبة) فيرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ ، ويعبر عنها $\mathbb{C} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$

مثال:الاعداد الاتية هي اعداد عقدية($z = 3 - 3i$, $z = 5$, $z = 5 + 6i$, $z = 3i$)

الخواص الجبرية للعدد العقدي

أ - خاصية الجمع: لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين معقدين فإن حاصل الجمع يعرف بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} z_1 \mp z_2 &= (x_1 + iy_1) \mp (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

مثال : لتكن $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 1 - i$ فإن

$$z_1 + z_2 = (3 + 3i) + (1 - i) = (3 + 1) + i(3 - 1) = 4 + 2i$$

ب - خاصية الضرب: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$عددين معقدين فإن حاصل الضرب يعرف بالشكل الآتي:
لتكن

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) = z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

مثال : لتكن $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$ فإن

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i)$$

$$= (1 \cdot 2 - 2(-1)) + i(1(-1) + 2(2))$$
$$= (2 + 2) + i(-1 + 4)$$
$$= 4 + 3i$$

ج- خاصية القسمة: لتكن $z_2 = x_2 + iy_2 , z_1 = x_1 + iy_1$ عددين معقدين فإن حاصل القسمة يعرف بالشكل الآتي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{y_1x_2 + x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}.$$

ملاحظة: الخاصية الابدالية والتجميعية تنطبق على الاعداد العقدية كما في الاعداد الحقيقية.

مثال: لتكن

$z_2 = 2 - 3i , z_1 = 4 + i$

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

ملاحظة:

أ- العنصر المحايد لعملية الجمع هو (٠,٠) أي أن $z = 0$

ب- العنصر المحايد لعملية الضرب هو (١,٠) أي أن $z = 1$

ج- النظير الجمعي للعدد العقدي هو $-(x, y)$ أي أن $z-$ $-z$

د- النظير الضربي للعدد العقدي هو $z^{-1} = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

هـ - حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ هو حقل غير مرتب

برهان الملاحظة (د) والملاحظة (هـ) تترك تمرين للطالب.

مثال : جد النظير الضربي للعد المعقد

$z = -7 + 5i$

أن النظير الضربي للعدد Z هو

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{-7+5i} = \frac{-7-5i}{(-7+5i)(-7-5i)}$$

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\therefore Z^{-1} = \frac{-7}{74} - \frac{5}{74}i$$

مرافق العدد المعقد: لتكن $z = x + iy$ ، فإن العدد المرافق (conjugate) للعدد zويرمز له بالرمز $\bar{z}$ ويعرف كالآتي:

$$\bar{z} = x - iy$$

والقيمة المطلقة (المقياس) للعدد العقدي ويرمز له بالرمز|z|ويعرف $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ويسمى طول العدد ويكافئ الصيغة

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \geq 0$$

مثال: لتكن $z = 3 - i$ فإن $\bar{z} = 3 + i$ وكذلك $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

خواص مرافق ومقياس العدد العقدي

ا – $Re\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad Im\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

ب – $\overline{z_1 \mp z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$

ج – $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

د – $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$

هـ – $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

و – $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$

ي – $|\bar{z}| = |z|$

ت – $\bar{\bar{z}} = z$

برهان ي:

نفرض ان

$$z = x + iy \quad and\ \bar{z} = x - iy$$

$$|\overline{Z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

نظرية. لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فإن

أ - $Re\, z_1 \le |z_1|\,,\ Im\, z_1 \le |z_1|$

ب - $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ج - $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

د - $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

البرهان ب:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re\,(\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

من الفرع (أ) يكون لدينا

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\le |z_1|^2 + 2|\overline{z_1}z_2| + |z_2|^2 \\ &\le (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نستنتج المطلوب.