جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

الاستمرارية

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضره : الثامنة)

نــظريـــة. ليكن g, f دالتين لهما نهايتين عند النقطة z_0 فإذا كانت

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = w_0 \quad , \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$$

فإن

1. $\lim_{z\to z_0}[f(z) \mp g(z)] = w_0 \mp w_1$
2. $\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = w_0 w_1$
3. $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_0}{w_1}$

البرهان. يترك تمرين للطالب

الاستمرارية . The continuity

تعريف:

ليكن $f(z)$ دالة عقدية معرفة على المجال D الذي يحوي z_0 ، يقال أن الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 إذا كان

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z)$$

وبعبارة أخرى الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط الآتي :

لكل $\varepsilon > 0$, $z \in D$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$|z - z_0| < \delta$ يؤدي إلى $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

نظريـــة . إذا كان g, f دالتين مستمرتين عند النقطة z_0 التي تنتمي للمجال المشترك D فإن:

أ. الدالة $(\alpha f + \beta g)$ مستمرة عند z_0.

ب. الدالة fg مستمرة في النقطة z_0 .

ج. الدالة f/g مستمرة في النقطة z_0 بشرط $g \neq 0$

البرهان يترك تمرين للطالب.

نظرية. إذاكانت f مستمرة عند النقطة z_0 والدالة g مستمرة عند النقطة $f(z_0)$ فإن $g \circ f$ مستمرة عندالنقطة z_0 .

البرهان . من تعريف الإستمرارية للدالة g عند النقطة $f(z_0)$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$|w - f(z_0)| < \delta_1 \Rightarrow \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وكذلك بما أن f مستمرة عند النقطة z_0 فإنه لكل $\varepsilon_1 > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1$$

وبفرض ان $w = f(z)$، $\delta_1 = \varepsilon_1$ نستنتج أن

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 \Rightarrow \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وبهذا أثبتنا أن $g \circ f$ مستمرة عند النقطة z_0 .

وهنا من الجدير بالملاحظة أننا نقول للدالة $f(z)$ مستمرة في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ إذا كان $u(x,y)$, $v(x,y)$ مستمرة عند (x_0, y_0)

مثال: الدالة الأتية $f = \sin x + ie^{2xy}$ مستمرة وذلك لأن $u(x,y) = \sin x$ مستمرة ، $v(x,y) = e^{2xy}$ مستمرة لجميع قيم x, y الحقيقية.

ملاحظة: إذا كانت f مستمرة على المجال D فهي تكون بالضرورة مستمرة عند x باعتبار y ثابت وكذلك مستمرة عند y باعتبار x ثابت، والعكس غير صحيح أي أن الإستمرارية للمتغير x عند z_0 وكذلك للمتغير y عند z_0 لايؤدي بالضرورة إلى الإستمرارية بالنسبة للمتغير z عند z_0 وفيا يلي مثال يوضح هذه الحالة.

مثال: لتكن

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

غير موجود وكذلك العكس نجد أن

فإذا فرضنا أن الدالة بالنسبة إلى x باعتبار y

$$f(x+i(0)) = \varphi(x) = \frac{0\cdot(2x)}{x^2} = 0 \qquad ,x \neq 0$$

إذا كانت $\varphi(x)$ مستمرة عند $(0,0)$ حيث

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \varphi(x) = 0 = f(0) = \varphi(0)$$

وأيضاً بالنسبة إلى y فإن

$$f(0+iy) = \psi(y) = \frac{0\cdot(2y)}{-y^2} = 0 \qquad ,y \neq 0$$

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ x\to 0}} \psi(y) = 0 = f(0) = \varphi(0)$$

أي أن $\psi(y)$ مستمرة عند $(0,0)$

ولكن إذا اعتبرنا أن $z = (x+iy) \to 0$ عن طريق المسار $y = my$

$$f(z) = \frac{2mx^2}{x^2 - m^2x^2} = \frac{m}{1-m^2} \quad ,z \neq 0$$

لذلك $\lim_{z\to} f(z)$ تعتمد على طريقة وصول z إلى الصفر لذلك تكون الغاية غير موجودة وبالتالي $f(z)$ غير مستمرة عند $z \neq 0$.

مثال: افحص استمرارية الدالة التاليه

$$f(z) = \begin{cases} z & ,if\ z \neq i \\ 0 & ,if\ z = i \end{cases}$$

الحـــــل:

1- f(i) = 0 (exist)

2- $\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} z^2 = -1$

بما ان قيمة الدالة ≠ غاية الدالة $\Leftarrow -1 \neq 0$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة.

مثال: افحص استمرارية الدالة التاليه

$$f(z) = \begin{cases} z+1 & , z \le 1 \\ 2 & , z > 1 \end{cases}$$

الحل:

1- f(1) = 2 (exist)

2- $\lim\limits_{z \to 1^-} f(z) = \lim\limits_{z \to 1^-} z+1 = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{z \to 1^+} f(z) = \lim\limits_{z \to 1^+} 2 = 2$

بما ان قيمة الدالة موجودة

وان الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\therefore$ الدالة مستمرة

الإستمرارية المنتظمة Uniform Continuity

تعريف . إذا كان لكل $0 < \varepsilon$ يمكن إيجاد $0 < \delta$ بحيث أن $|z_1 - z_2| < \delta$ فإن $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ حيث z_2, z_1 أي نقطتين اختياريتين ضمن المجال .

لاحظ في هذا التعريف أن اختيار δ يعتمد على ε فقط ولا يعتمد على z_2, z_1 .

مثال: إثبت أن $f(z) = z^2$ منتظمة الإستمرارية في المنطقة $|z| < 1$. لكنها غير منتظمة الاستمرارية في الحقل C

الحل. ليكن z_2, z_1 أي نقطتين في المجال $|z| < 1$ لذلك إذا كان

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2|$$

$$\le |z_1 - z_2|(|z_1| + |z_2|) < 2|z_1 - z_2| \qquad (|z| < 1)$$

$$|z_1 - z_2| < \delta \to |f(z_1) - f(z_2)| < 2\delta$$

الأن ليكن $\varepsilon > 0$ فنضع $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ لذلك يكون لدينا

$$|z_1 - z_2| < \delta \to |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

وهو المطلوب من النظرية .

مثال: إثبت أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الإستمرارية في المنطقة $0 < |z| < 1$.

الحل. ليكن $0 < \varepsilon$ ولتكن $0 < \delta < 1$ ولتكن z_1, z_2 عددين في المجال $|z| < 1$ حيث $z_1 = \delta$، $z_2 = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$
نلاحظ أن

$$|z_1 - z_2| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right| < \delta$$

بينما

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| > \varepsilon$$

لذلك من التعريف نجد أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الإستمرارية في المجال $0 < |z| < 1$.
الأن سنعطي بعض الحقائق المهمة بدون برهان.