جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

التبلوجيا للأعداد العقدية

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضره : الرابعة)

التبولوجيا للأعداد العقدية

في هذا الفصل سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية التي تتعلق بمجموعات النقط في الفضاء العقدي وأول هذه المفاهيم هو المنحني والذي يعرف بأنه المدى للدالة المستمرة ذات القيم العقدية $z(t)$ المعرفةعلى الفترة المغلقة $[a,b]$بالصيغة $z(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ حيث$a\le t\le b$ وان$x(t),y(t)$ دوال حقيقية مستمرة.

و يكون المنحني املسا Smooth عندما تكون $x(t),y(t)$ دوال قابلة للاشتقاق .

وسنحدد المنحني C بالمعادلة الوسيطية $z(t)=x(t)+iy(t)$ حيث $a\le t\le b$ وأن النقطة $z(a)=\big(x(a),y(a)\big)$ تسمى النقطة الإبتدائية للمنحني بينما $z(b)=\big(x(b),y(b)\big)$ تكون النقطة النهائية للمنحني.

الآن إذا كانت $z_1=x_1+iy_1$, $z_0=x_0+iy_0$ نقطتين فإن الخط الذي يربط z_0 مع z_1 هو $C{:}\,z(t)=(x_0+(x_1-x_0)t+i(y_1-y_0)t)$ حيث $0\le t\le 1$

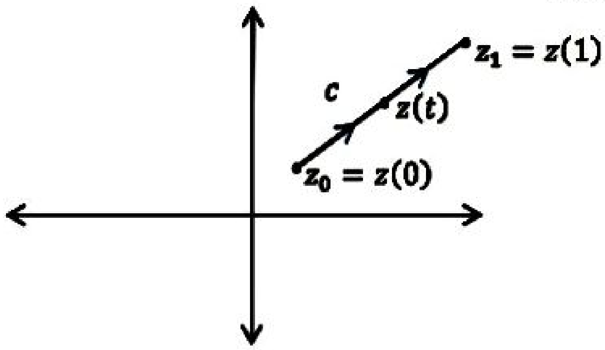
كما موضح بالشكل (١-٤) ويمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$C{:}\,z(t)=z_0+(z_1-z_0)t,\quad 0\le t\le 1$$

بالنسبة للمنحني $-C$ فإن المعادلة ستأخذ الشكل الآتي:

$$-C{:}\,\gamma(t)=z_0+(z_0-z_1)t,\quad 0\le t\le 1$$

ومن هنا نستطيع القول أنه إذا كان C منحني معادلته الوسيطية هي $z(t)$ فإن المعادلة الوسيطية للمنحني $-C$ تكون $z(1-t)$, $0\le t\le 1$.



وإذا كانت $z(a)=z(b)$ فان المنحني C يسمى منحني مغلق Closed curve. الان دعنا ندرس المنحني الاتي $x(t)=\sin 2t\cos t$ و $y(t)=\sin 2t\sin t$ حيث $0\le t\le 2\pi$ الذي يمثل وردة بأربعة أوراق

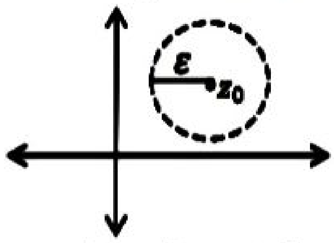
لاحظ أن t تنطلق من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ النقاط في الورقة (١) ومن $\frac{\pi}{2}$ إلى π في الورقة (٢) وبين π و $\frac{3\pi}{2}$ في الورقة (٣) وأخيراً t بين $\frac{3\pi}{2}$ ، 2π في الورقة (٤).

وكذلك يمكن ملاحظة أن المنحني يقطع نفسه في نقطة الأصل فقط. لذلك نسمي المنحني الذي لا يقطع نفسه بالمنحني البسيط $(Simple)$ والذي يتطلب $z(t_1) \neq z(t_2)$ عندما يكون $t_1 \neq t_2$ باستثناء إحتمالية أن يكون $t_1 = a$ ، $t_2 = b$.

الأن من المواضيع المهمة التي بصدد دراستها في هذا الفصل هي الجوار للنقطة z_0 في المستوي العقدي والتي تعرف بأنها جميع النقاط التي تحقق المتراجحة الآتية

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

وهذه تمثل مجموعة النقاط داخل القرص المفتوح بنصف قطر $\varepsilon > 0$ حول z_0 كما موضح بالشكل



ويرمز له بالرمز $D_\varepsilon(z_0)$ والذي يمثل قرص الوحدة المفتوح مركزه z_0 ونصف قطره $\varepsilon > 0$ وعليه يكون

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$$

وأيضا نستطيع تعريف قرص الوحدة المغلق الذي مركزه z_0 ونصف قطره ε بالصيغة

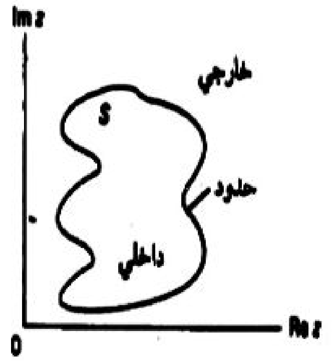
$$\overline{D}_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

والقرص المثقوب بالصيغة

$$D_\varepsilon^*(z_0) = \{z: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D_\varepsilon(z_0)\backslash\{0\}$$

النقطة z_0 تسمى نقطة داخلية (Interior point) للمجموعة S إذا وجد جوار لهذه النقطة يقع باكمله في S وتسمى نقطة خارجية (Exterior point) للمجموعة S إذا وجد جوار للنقطة z_0 تقاطعه مع المجموعة S يكون مجموعة خالية z_0

والنقطة التي لا تكون داخلية ولا خارجية تسمى نقطة حدودية (Boundary point) .



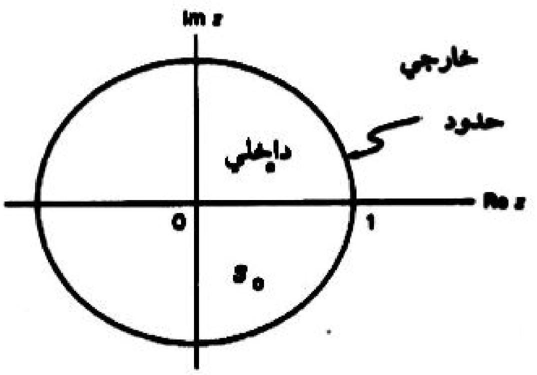
مثال

لنفرض أن S_0 مجموعة النقاط z حيث $|z| < 1$. أوجد داخل المجموعة S_0 وخارجها وحدودها؟

الحل

لنفرض أن z_0 أي نقطة من S_0. لاحظ أن القرص $|z - z_0| < \varepsilon$ يقع بكامله داخل S_0 عندما $\varepsilon < 1 - |z_0|$. إذن كل نقطة من S_0 نقطة داخلية، وبالمثل كل نقطة z_0 تحقق $|z_0| > 1$ هي نقطة خارجية إلى S_0. إذا كان $|z_0| = 1$، فإن كل جوار ε إلى z_0 سوف يحوي نقاطاً من S_0 ونقاطاً ليست من S_0. إذن حدود المجموعة S هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|z| = 1$، داخل S_0 هي المجموعة $|z| < 1$، أما خارج S_0 فهي مجموعة النقاط التي تحقق

$|z| > 1$ انظر الشكل التالي:



. . اكتب المعادلة هنا

المجموعة S تسمى مجموعة مفتوحة إذا كان كل نقطة من نقاطها نقطة داخلية وتسمى مغلقة إذا كل نقاطها الحدودية تقع داخل S.

وكذلك S مجموعة متصلة (connected) اذا لكل z_2, z_1 يوجد منحني يصل بينهما يقع بأكمله داخل S.مثال على ذلك تكون

القرص $D = \{z: |z| < a\}$ مجموعة متصلة وأيضا الشكل الحلقي $A = \{z: a < |z| < b\}$ هو أيضا مجموعة متصلة مفتوحة لأن أي نقطتين في Aالمفتوح فإن المنحني الذي يربطهما يقع بأكمله داخله

وعليه نسمي المجموعة المفتوحة المتصلة بإسم المجال (Domain) والمجال مع جميع نقاطه الحدودية يسمى منطقة (Region) ومثال على ذلك الشريط $\{z: 1 < Im\, z \leq 2\}$ والمجموعة التي تشكل من اتحاد المجال والنقاط الحدودية

تسمى منطقة مغلقة ومثال على ذلك نصف المستوي $\{z: x \le y\}$.

وإذا كانت S^c (متممة المجموعة S) متصلة فإن المجموعة S تكون متصلة اتصالاً بسيطا (Simply connected)
أما إذا كان S^c ليست متصلة فإن S متصلة اتصالاً مضاعفاً (Multiply connected))

مثـــــال: إن المجموعة $\{ Z : |Z| < 1 \}$ هي مجموعة متصلة.

تسمى نقطة تجمع (Accumulation point) للمجموعة S إذا كان كل جوار للنقطة z_0 يحتوي على الأقل نقطة والنقطة z_0
واحدة من S وعليه تكون المجموعة S مغلقة إذا احتوت على كل نقاط تجمعها.
لاحظ أن نقطة الأصل هي نقطة التجمع الوحيدة للمجموعة $z_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\dots)$.

مثال: جد نقط التجمع للمجموعة S حيث

$$S = \left\{(-1)^n \cdot \frac{i}{n} : n = 1,2,\dots\right\}$$

الحل. لاحظ أن

$$S = \left\{-i, \frac{1}{3}i, \frac{-4}{3}i, \frac{5}{4}i, \dots\right\}$$

أيضاً يمكن ملاحظة $S = S_1 \cup S_2$ حيث $S_1 = \left\{-i, \frac{-1}{3}i, \frac{-1}{5}i, \dots\right\}$

$$S_2 = \left\{\frac{1}{2}i, \frac{1}{4}i, \frac{1}{6}i, \dots\right\}$$

نلاحظ أن نقاط التجمع للمجموعة S للنقاط الأولى هي $-i$ والثانية i وعليه من التعريف نجد أن نقاط التجمع للمجموعة S هي $\{i, -i\}$.

Homework

١- تحقق من أن

ا- $(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=-2i$

ب - $\sqrt{2}i\,,\ -\sqrt{2}i$ هما جذران للمعادلة $z^2+2=0$

٢- إثبت أن

أ - لأي عدد معقد إذا كان $Im\,z>0$ فإن $Im\left(\frac{1}{z}\right)<0$

ب- لأي عددين معقدين z_2, z_1 فإن $z\overline{z}$ عدد حقيقي.

جـ- لأي عدد معقد z فإن $|Re\,z|+|Im\,z|\le\sqrt{2}|z|$.

د - $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2$

٣- عبر عن الأعداد التالية بالصيغة القطبية ثم بصيغة أويلر

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{(1-i)^2}\ ,\ 2-3i\,.$$

٤- جد الجذور للأعداد العقدية الآتية

أ. $(8-8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$ ب. $(-16)^{\frac{1}{4}}$ جـ. $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}}$

٥- عبر عن الأعداد العقدية الآتية بالصيغة $x-iy$

أ. $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ب. $e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\pi}$

٦- $|z^2+2z-1|\le 9$ حيث z نقطة تقع على محيط دائرة نصف قطرها ٢ ومركزها نقطة الأصل

٧- إثبت صحة العلاقة الآتية $(-1+i)^7=-8(1+)$

٨- لتكن S مجموعة مفتوحة تحوي النقاط z بحيث $|z|<1$ أو $|z-2|<1$ فهل Sمتصلة؟ ولماذا؟

٩- جد مجموعة النقاط الحدودية والتجمع للمجموعات الآتية

أ. $S=\left\{\frac{i}{n}:n=1,2,3,\dots\right\}$ ب. $S\{z:Re\,z^2>0\}$

١٠- جد المجموعات الآتية فيما إذا كانت متصلة ، منطقة ، مقيدة

أ. $\{z:Re\,z>1\}$ ب. $\{-1<Im\,z\le 2\}$ جـ. $\{z:|z+2i|>1\}$

١١- برهن على أنه إذا كانت المجموعة تحتوي على كل نقاط تجمعها فإنها مغلقة.