جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

التحويل الخطي

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

مثال: لتكن الدالة $f(z)$ معرفة كالآتي

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{5}}$$

فإنها دالةخماسية القيم لأنه كل عدد $z \in S$ يوجد ثلاثة قيم للمتغير w .

(المحاضره : السادسة)

التحويل الخطي Linear Transformation

لتكن $A = be^{i\theta}$, $B = b_1 + ib_2$ حيث $b > 0$. فإن التحويل $w = f(z) = Az + B$ هو تطبيق تقابلي (شامل ومتباين) من المستوي z الى المستوي w ويسمى التحويل خطي. وهذا التحويل لو أمعنا النظر فيه لوجدنا أنه تركـيب من التدوير والتكبير و الإنتقال وهذا واضح من خلال $\theta = Arg\, A$ كتدوير يتبعها تكبـير بواسطـــة

$k = |A|$ أما الإنتقال فهو من خلال المتجه $B = b_1 + ib_2$. أما التطبيق العكسي لهذا التطبيق فهو

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$$

والتطبيق f تطبيق متباين وشامل من المستوي z الى المستوي w.

التحويل من نوع $(z^{\frac{1}{2}}, z^2)$

التحويل $w = f(z) = z^2$ نستطيع تمثيله بالأحداثيات القطبية كالآتي $w = f(z) = r^2e^{i2\theta}$ حيث $r > 0$، $-\pi < \theta \le \pi$ فإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية للمستوي w، $w = \rho e^{i\emptyset}$ فإن التحويل $f(z) = z^2$

$$\emptyset = 2\theta \quad , \qquad \rho = r^2$$

أما إذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية فإن التطبيق $w = z^2$ سيكون كالآتي

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$$

لذلك

$$u = x^2 - y^2 \, , v = 2xy$$

التحويل $w = z^{\frac{1}{2}}$ ممكن أن نعبر عنه بالصيغة القطبية كالآتي

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad -\pi < \theta \le \pi \ , \qquad r > 0$$

وكذلك إذا استخدمنا $w = \rho e^{i\emptyset}$ في المستوي w فإن التطبيق $w = z^{\frac{1}{2}}$ يكون $\rho = r^{\frac{1}{2}}$, $\emptyset = \frac{\theta}{2}$

وإذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية سيكون $z = w^2 = u^2 - v^2 + i2uv$

فإن التطبيق $z = w^2$ يعطى بالمعادلات الآتية

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv$$

مثال:

إثبت أن الدالة $f(z) = iz$ تحول الخط $y = x + 2$ إلى $v = -u - 2$

الحل.

$$u + iv = f(z) = i(x + iy)$$
$$= -y + ix$$

لذلك نجد أن

$$u = -y$$
$$v = x$$

بتعويض قيم v, u في المعادلة $y = x + 2$ نستنتج أن

$$-u = v + 2$$

لذلك

$$v = -u - 2$$

مثال: تحت تأثير التحويل $w = iz + i$ بين أن نصف المستوي $x > 0$ يتحول إلى نصف المستوي $v > 0$.

الحل.

$$u + iv = f(z) = i(x + iy) + i$$
$$= ix - y + i$$
$$= i(x + 1) - y = -y + i(x + 1)$$

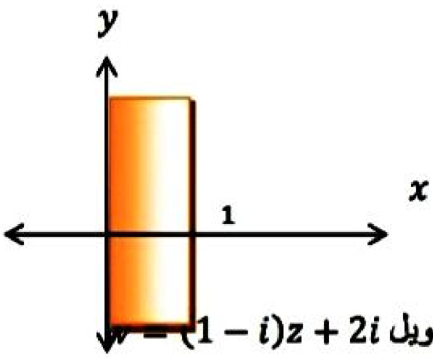
لذلك نجد أن

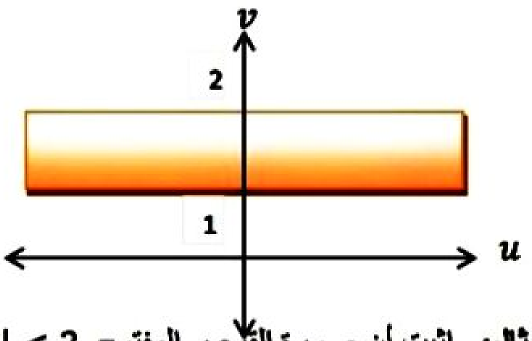
$$u = -y \, , v = x + 1$$

إذن

$$0 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < v < 2$$

وكما موضح بالشكل





مثال: إثبت أن صورة القرص المفتوح $|z - 1 - i| < 2$ تحت تأثير التحويل $w = (1 - i)z + 2i$ هو القرص المفتوح $|w + 2 - 2i| < 4$.

الحل.

التحويل العكسي يعطى بالصيغة الآتية

$$z = \frac{w - 2i}{1 - i}$$

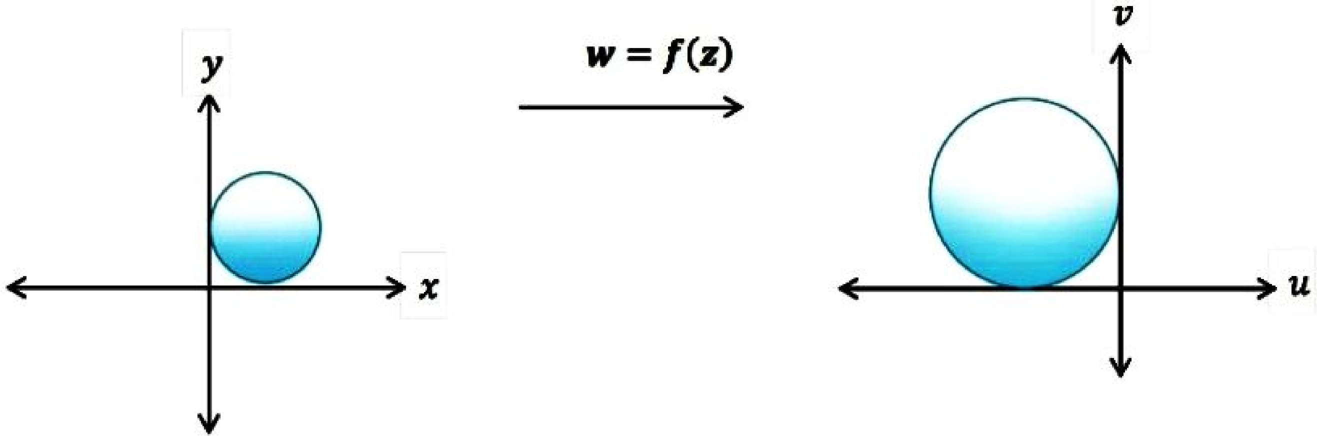
وبالتعويض يصبح لدينا

$$\left|\frac{w-2i}{1-i}-1-i\right|<1$$

$$|w-2i-(1+i)(1-i)|<2$$

وبالتبسيط يكون

$$|w+2-2i|<2$$



مثال: أوجد تمثيلاً هندسياً للدالة $w=f(z)$ المعرفة على المجال

$$D=\{z=x+i : 0\le x\le 2\}$$

حيث $w=z^2$

الحل. لاحظ أن

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-1)+i(2x)$$
$$=u+iv$$

لذلك $u=x^2-1,\qquad v=2x$

وبالتعويض عن قيمة x نحصل على

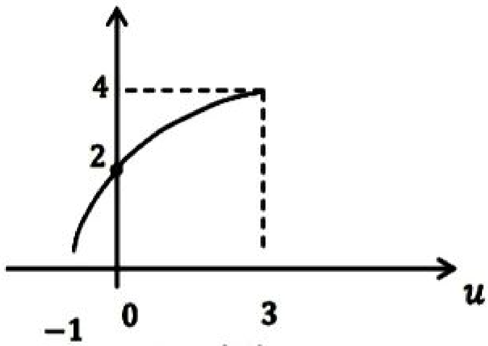
$$u=\left(\frac{v}{2}\right)^2-1$$

وهي معادلة قطع مكافئ في المستوي wحيث $-1\le u\le 3$

لأن $u=x^2-1$ وأن $0\le x\le 2$ وأيضاً لدينا $0\le v\le u$

بسبب $v=2x$ وان $0\le x\le 2$. أنظر الشكل (٢-٧)

v



الشكل ٢-٧

الغايات والاستمرارية Limit and Continuous

تعريف: لتكن الدالة المركبة f معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة z_0 ماعدا z_0 ذاتها فإن غاية الدالة $f(z)$ عندما z تقترب من z_0 هي العدد w_0 أو بعبارة اخرى

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

وتحليلياً يكون التعريف مكافئ للتعريف الآتي :

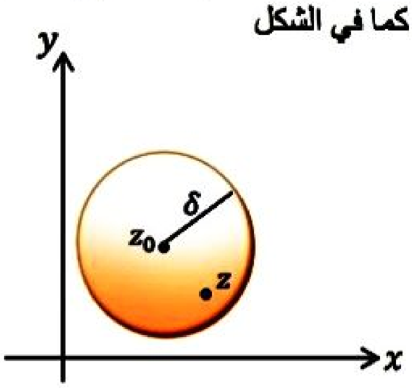
لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث أن

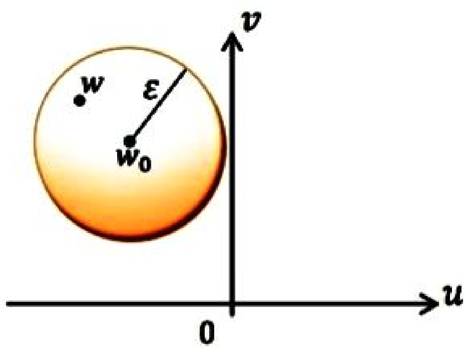
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

متى ما كانت

$$.0 < |z - z_0| < \delta$$

وهندسياً يكون أن لأي جوار ε, $|w - w_0| < \varepsilon$ للنقطة w_0 يوجد جوار لـ δ , $0 < |z - z_0| < \delta$ للنقطة z_0 بحيث أن كل نقطة z التي تكون صورتها w تقع داخل الجوار ε كما في الشكل





وهنا جدير بالذكر أنه عند دراسة الغايات في الدوال المركبة يجب أن يكون لدينا الدقة بالتمييز بينها وبين الدوال الحقيقية أن في الدوال الحقيقية δ يمثل فترة مركزها x_0 ونصف قطرها δ بينما في الدوال المركـــبة فإن الجوار δحيث يمثل الجـــوار

قرص مركزه z_0 ونصف قطـــــره δ وهذا ينطبق على جوار ε في الجملة $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ وهذه الملاحظة تفقد فكرتي النهاية من اليمين واليسار حيث الإقتراب للنقطة x_0 يكون أما من اليمين أو اليسار فقط أما في الدوال المركبة حيث أن الجوار هو قرص مركزه z_0 ونصف قطره δ فإن الإقتراب يكون عبر مسارات لانهائية .

مثال: جد الغاية للدالة $f(z) = \frac{z^2-4}{z-2}$ عندما $z \to 2$ باستخدام التعريف .

الحل. لاحظ أن الدالة غير معرفة عند $z = 2$ لذلك يمكن استخدام فكرة التحليل البسيط كالآتي

$$f(z) = \frac{(z+2)(z-2)}{z-2} = z + 2$$

إذن يكون باعتبار $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon$

يكون $0 < |z-2| < \delta$

يؤدي إلى $|f(z) - f(z_0)| = |z + 2 - 4| = |z - 2| < \varepsilon$

إذن $\lim_{z \to 2} f(z) = 4$

مثال: إثبت ان $lim_{z \to 2i-1}(2z + 3) = 4i + 1$

الحل. لتكن $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد $\delta > 0$ بحيث يكون $0 < |z - (2i - 1)| < \delta$ يقابل $|2z + 3 - (4i + 1)| < \varepsilon$

الآن نعيد كتابة

$$|2z + 3 - (4i + 1)| = |2z - 4i + 2| < |2(z - (2i - 1))| < |z - (2i - 1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نختار $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ فإن في هذه الحالة يكون

$$0 < |z - (2i - 1)| < \delta$$

يؤدي إلى $|2z + 3 - (4i + 1)| < \varepsilon$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{z \to 2i-1}(2z + 3) = 4i + 1$$

مثال: إثبت ان $lim_{z \to i} z^2 = -1$

الحل. لتكن $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد $\delta > 0$ بحيث يكون $0 < |z - i| < \delta$ يقابل $|z^2 + 1| < \varepsilon$

الآن نعيد كتابة

$$|z^2 + 1| = |z - i||z + i| < \delta|z + i|$$

إذا اخترنا $\delta < 1$ فإن $|z + i|$ يكون مقيدا بالعدد ٣ وهذا يعني أنه لأي $\delta < max\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$ فإن في هذه الحالة يكون

$$0 < |z - i| < \delta$$

يؤدي إلى $\delta < \varepsilon$ $|z^2 + 1| < \varepsilon$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{z \to i} z^2 = -1$$

مثال: إثبت انه إذا كان

$$f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$$

المعرفة على القرص $|z| < 2$ فإن

$$\lim_{z \to 2} f(z) = i$$

الحل. لاحظ أن العدد ٢ يقع على حدود القرص $|z| < 2$، وأيضاً عندما z تقع في القرص $|z| < 2$ فإن

$$|f(z) - i| = \left|\frac{i\bar{z}}{2} - i\right| = \left|\frac{z-2}{2}\right|$$

لذلك لأي z ، أي عدد $\delta > 0$ فإن

$$|f(z) - i| < \varepsilon$$

عندما يكون

$$0 < |z - 2| < 2\varepsilon$$

لذلك نختار $\delta = 2\varepsilon$ أصغر ما يمكن

مثال: إثبت إن الغاية للدالة $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ عندما $z \to 0$ غير موجودة.

الحل. لبرهنة ذلك دعنا نجد الغاية $z \to 0$ على الاحداثي الحقيقي x والتخيلي y .

في الحالة الأولى لتكن $z = x \in \mathbb{R}$ ، إذن

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\bar{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

في الحالة الثانية لتكن $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ فإن

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{y\to 0} \frac{iy}{iy} = -1$$

لذلك سنحصل على قيمتين مختلفتين للغاية تعتمد على إتجاه التقارب من الصفر لذلك هذا يؤدي إلى ان الغاية غير موجودة

مثال: جد $\displaystyle \lim_{z \to 1+i} \frac{5Z+1}{5Z-i}$

الحـــل

$$\lim_{z \to 1+i} \frac{5Z+1}{5Z-i} = \left[\frac{\lim_{z\to 1+i}(5Z) + \lim_{z\to 1+i} 1}{\lim_{z\to 1+i}(5Z) + \lim_{z\to 1+i} i} \right]$$

$$= \frac{5(1+i)+1}{5(1+I)+i} = \frac{6+5i}{5+4i}$$