جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

التمثيل الهندسي للمجموع والفرق

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضره : الثالثة)

التمثيل الهندسي للمجموع والفرق

ليكن العدد $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن $z_1 + z_2$ يمثل نفس الكمية التي نستخدمها لإيجاد محصلة قوتين، كذلك $z_1 - z_2$ نجمع z_1 مع $(-z_2)$ أي $z_1 + (-z_2)$.

ملاحظة:

ا. $|z| = r$ تمثل جميع النقاط الواقعة على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل (x, y) ونصف قطرها r .

$|z - z_0| =$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة على محيط دائرة مركزها $z_0 = (x_0, y_0)$ ونصف قطرها r.

ب المعادلة r

ج. $|z_1 - z_2|$ تعني البعد بين النقطتين z_1, z_2 .

د. المتراجحة $|z - z_0| \leq r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r .

مثال: إثبت أن $|z-2+i|=3$ تمثل دائرة مركزها $z_0=2-i$ ونصف قطرها 3 .

الحل. بما أن $z=x+iy$ فإنه سيكون لدينا

$$|x+iy-2+i|=3$$
$$|(x-2)+i(y+1)|=3$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2=3$$

بمقارنتها مع معادلة الدائرة فإنه يكون المركز هو $(2,-1)$ وهو العدد العقدي $z_0=2-i$ ونصف القطر هو ٣.

مثال: إثبت أن $|z-2i|=|z+2i|$ تمثل معادلة المحور الحقيقي X

الحل. بما أن $z=x+iy$ فإنه سيكون لدينا

$$|x+iy-2i|=|x+iy+2i|$$
$$x^2+(y-2)^2=x^2+(y+2)^2$$
$$y^2-4y+4=y^2+4y+4$$
$$\Rightarrow 8y=0 \Rightarrow y=0$$

وهذه معادلة المحور الحقيقي X .

قوة العدد العقدي ونظرية ديموفيرا De Moivre's Theorem

ليكن n عدد صحيح موجب فإنه طبقا لحاصل الضرب يكون

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

أما إذا كان n عدد صحيح سالب فإن $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ حيث $z\neq 0$

العلاقة أعلاه صحيحة لكل $n\in\mathbb{Z}$ حيث $(\cos n\theta+i\sin n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ وتسمى هذه الصيغة نظرية ديموافر.

وإذا كان الأس كسر فإن

$$z^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{Arg\, z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{Arg\, z+2k\pi}{n}\right),$$

وهي الصيغة التي تعطينا جميع الجذور النونية للعدد z حيث $k=0,1,\dots,n-1$

مثال: إستخدم علاقة ديموفيرا في حساب $z=\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}$

الحل. نفرض أن $z_1=-1+\sqrt{3}i$

فإن $z_1=2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\cos\theta=\frac{-1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن θ تقع في الربع الثاني وعليه يكون

$$\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

إذن يكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$

وهذا يؤدي $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

وبالتالي يكون $z = {z_1}^{12} = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}$

وحسب علاقة ديموفيرا فإنه

$$\begin{aligned} z &= 2^{12}\left(\cos\frac{24\pi}{3} + i\sin\frac{24\pi}{3}\right) \\ &= 2^{12}(\cos 8\pi + i\sin 8\pi) \\ &= 2^{12}(1 + 0i) \\ \Rightarrow z &= 2^{12} \end{aligned}$$

مثال: جد الجذور الثلاثة الأولى للعدد العقدي $1 + i$

الحل. $r = \sqrt{2}$ وأن $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$z_k = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{3}\right)$$

$$k = 0,1,2$$

إذن عندما $k = 0$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

وعندما $k = 1$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

وعندما $k = 2$ يكون لدينا

$$z_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$