جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

التمثيل الهندسي والصيغة القطبية للعدد العقدي

الاستاذ نهاد شريف خلف

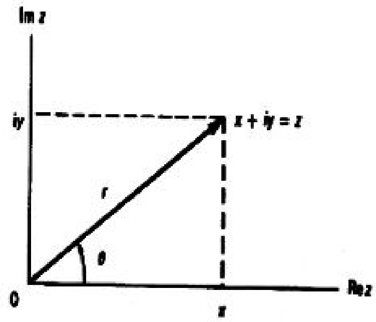
الايميل : nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضره: الثانية)

التمثيل الهندسي والصيغة القطبية للعدد العقدي

عند رسم $z = x + iy$ في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ فإن $|z|$ يمثل طول المتجه الواصل بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل العدد

(0,0) كما في الشكل



الزاوية θ الظاهرة في الشكل تسمى سعة (argument) العدد العقدي z وتكتب بالشكل $\theta = arg\, z$
وتعرف بأنها الزاوية التي يصنعها العدد العقدي مع محور السينات الموجب.

نلاحظ أن θ غير وحيدة التحديد لأن إذا عوضنا θ بـ $\theta + 2n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ ، فإننا نحصل على نفس النقطة ، بينما تكون وحيدة حين $-\pi < \theta \le \pi$ عندئذ نطلق عليها القيمة الأساسية للسعة $arg\, z$ ويرمز لها بالرمز $Arg\, z$.

مثال: جد السعة $arg\, z$ والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي $z = 1 + i$

الحل. حسب تعريف السعة θ نجد أن $arg\, z = \theta = tan^{-1}\frac{y}{x} = tan^{-1}\frac{1}{1}$

إذن تكون

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

$$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

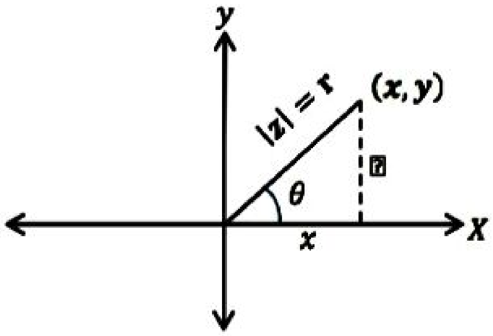
أما القيمة الأساسية لهذه السعة فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ حيث $-\pi < \theta \le \pi$ أي أن $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$

أما الآن سنوضح الصيغة القطبية(Polar form) للعدد العقدي

لتكن r وθ الإحداثيات القطبية للنقطة (x, y) التي تقابل العدد العقدي الغير صفري $z = x + iy$. من المعروف سابقا أن $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ ، كذلك العدد z نستطيع كتابته بالصيغة القطبية وكما يلي

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

حيث $r = |z|$ ، θ : هي السعة للعدد العقدي z كما نبينه بالشكل



مثال: جد السعة $arg\, z$ والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي

$$z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$$

الحل.

حسب تعريف السعة θ نجد أن

$$arg\, z_1 = tan^{-1}\frac{0}{-2} = \pi$$

$$arg\, z_2 = tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$arg\, z = arg\, z_1 - arg\, z_2$$

إذن تكون

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

أما القيمة الأساسية لهذه السعة فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ حيث $-\pi < \theta \le \pi$ أي أن $Arg\, z = \frac{2\pi}{3}$

نظرية:

ليكن z_1, z_2 عددان معقدان فإن

أ. $arg(z_1 z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$

ب. $arg(z_1/z_2) = arg\, z_1 - arg\, z_2$

جـ. $arg(\overline{z_1}) = -\, arg\, z_1$

البرهان. نبرهن الفرع (أ) ونترك الفروع البقية كتمرين للطالب.

برهان (أ) من الصيغة القطبية للعدد العقدي فان

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

حيث θ_2, θ_1 السعة للعددين z_2, z_1 على الترتيب.

وعليه يكون

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(cos\,\theta_1\, cos\,\theta_2 - sin\,\theta_1\, sin\,\theta_2) + i(cos\,\theta_1\, sin\,\theta_2 + sin\,\theta_1\, cos\,\theta_2)$$
$$= |z_1||z_2|(cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sin(\theta_1 + \theta_2))$$

لذلك ستكون السعة للعدد العقدي $z_1 z_2$ هي $\theta_1 + \theta_2$

أي أن $arg(z_1 z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$

تعريف

تعرف صيغة أويلر (Euler's formula) بالشكل الآتي:

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\, sin\,\theta$$

حيث θ قيمة حقيقية تقاس بالزاوية النصف القطرية.

لذلك يمكن إعادة تعريف العدد العقدي المعرف بالصيغة (1) بالصيغة الآتية

$$z = re^{i\theta} \qquad (2)$$

مثال: أكتب العدد $z = -1 - i$ بصيغة أويلر

الحل.

$$\theta = tan^{-1}\frac{-1}{-1} = tan^{-1} 1$$
$$= \frac{-3\pi}{4} + 2n\pi \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

لذلك يكون $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}+2n\pi\right)}$

مثال: جد السعة والقيمة الأساسية للسعة واكتب صيغة أويلر للعدد العقدي

$$z = \frac{-2-2i}{\sqrt{3}+i}$$

الحل.

$$\theta_1 = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$\theta_2 = tan^{-1}\frac{-2}{-2} = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$$

$$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

$$arg\, z = \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$= \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi$$

$$= \frac{13\pi}{12} + 2n\pi \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

فتكون الصيغة القطبية للعدد

$$z = \frac{|-2-2i|}{|\sqrt{3}+i|}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}+2n\pi\right)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+2n\pi\right)}$$

ملاحظة: $Arg(z_1 z_2) \neq Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

مثال: لنأخذ $z_2 = -1$, $z_1 = 2i$ فإن

$$Arg\, z_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad Arg\, z_2 = \pi$$

وعليه يكون $Arg(z_1 z_2) = (-2i) = \frac{-\pi}{2}$

بينما $$Arg\, z_1 + Arg\, z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

مثال: جد السعة والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي $-i$ ثم اكتبه بصيغة أويلر .

الحل. $\theta = tan^{-1}\frac{-1}{0} = \frac{-\pi}{2} + 2n\pi \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

أما القيمة الأساسية للسعة فهي $Arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$

صيغة اويلر $|z| = r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

وعليه يكون $z = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+2n\pi\right)} \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$