جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

حقل الاعداد العقدية الموسعة

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضره: السابعة)

تعريف.

عندما تكون النقطة ∞ (المالانهاية) مع حقل الأعداد العقدية عندئذٍ يطلق عليه حقل الأعداد العقدية الموسعة.
وهنا سندرس الغاية ومفهومها للدوال العقدية عندما يقترب المتغير z من المالانهاية (∞) ومن تعريف الغاية سابقاً سنقوم بتغيير بسيط لجوار النقاط w_0 , z_0 بجوارات ∞ والنظرية الآتية ستبين كيف يتم هذا.

نظرية. لتكن z_0 نقطة في المستوي z , w_0 نقطة في المستوي w فأن:

أ. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$

ب. $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z \to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = w_0$

ج. $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z \to 0} \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 0$

البرهان . أ. لتكن $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

عندما $0 < |z - z_0| < \delta$

وهذا يعني $w = f(z)$ تقع داخل الجوار $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$ للنقطة ∞ متى ما كانت z تقع داخل الجوار

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

وعليه يكون $\varepsilon > \left|\frac{1}{f(z)} - 0\right|$ عندما $0 < |z - z_0| < \delta$

لذلك يكون $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

ب. لتكن $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

عندما $|z| > \frac{1}{\delta}$ يكون $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

ضع $\frac{1}{z}$ محل z لذلك $\left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$

عندما $0 < |z - 0| < \delta$ وهو المطلوب.

الحالات الاخرى تترك تمرين للطالب

مثال: جد قيمة مايلي :

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1}$$

الحل. بما أن $\lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz-2} = 0$ لذلك يكون حسب النظرية ٢-١ أعلاه

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1} = \infty$$

مثال: اثبت ان

$$\lim_{z\to 3} \frac{z - 1}{z - 2} = 2$$

الحل

بتبسيط المقدار

$|f(z) - A|$نحصل على

$$|f(z) - A| = \left|\frac{z - 1}{z - 2} - 2\right| = \left|\frac{3 - z}{z - 2}\right| < \frac{\delta}{|z - 2|}$$

حيث افترضنا ان

$0 < |z - 3| < \delta$مع وجوب حساب

δبدلالة ε اذا كان

$\delta < \frac{1}{2}$باستخدامه المتراجحه المثلثيه

$$|z - 2| = |1 - (3 - z)| \geq 1 - |3 - z| > 1 - \delta > \frac{1}{2}$$

عندئذ

$$\left|\frac{z - 1}{z - 2} - 1\right| < 2\delta$$

وعليه اذا كان

$\varepsilon > 0$ معطى نختار

$\delta < min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon)$

فنجد

$$\left|\frac{z-1}{z-2} - 2\right| < \varepsilon$$

مثال: إثبت ان

$$\lim_{z\to\infty} \frac{3z+i}{z+2} = 3$$

الحل .

$$\lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{3}{z}\right)+i}{\left(\frac{1}{z}\right)+2} = \lim_{z\to\infty} \frac{3+iz}{1+2z} = 3$$

لذلك بواسطة النظرية أعلاه يكون

$$\lim_{z\to\infty} \frac{3z+i}{z+2} = 3$$

مثال: إثبت أن $lim_{z\to\infty} \frac{2z^5-1}{z^4+1} = \infty$

الحل .

بما أن
$$\lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{1}{z^4}\right)-1}{\left(\frac{2}{z^5}\right)+1} = \lim_{z\to 0} \frac{z(1-z^4)}{2+z^5} = 0$$

لذلك بواسطة نظرية ٢-١ يكون

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z^5-1}{z^4+1} = \infty$$

نظرية . لتكن $w = f(z) = u + iv$ دالة عقدية حيث w معرف بجوار النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ما عدا z_0 ذاتها وليكن $w_0 = u_0 + iv_0$ حيث $u_0 = u_0(x_0, y_0)$ ، $v_0 = v_0(x_0, y_0)$ عندئذٍ يكون

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

إذا وفقط إذا كان

و
$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x,y) = v_0 \end{cases} \qquad (1)$$

البرهان . نفرض (1) صحيحة لذلك لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < \delta_1$ ، $\delta_2 > 0$ بحيث أن

إذا كان $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$ فإن $|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

و $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2$ فإن $|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

فإذا فرضنا أن δ أصغر من δ_1 ، δ_2 فبما أن

$$|(u+iv) - (u_0 - iv_0)\ | = |(u-u_0) + i(v-v_0)| \le |u-u_0| + |v-v_0|$$

و

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |(x-x_0) + i(y-y_0)| = |(x+iy) - (x_0+iy_0)|$$

فلذلك إذا كان

$$0 < |(x+iy) - (x_0+iy_0)| < \delta$$

فإن

$$|(u+iv) - (u_0 - iv_0)\ | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يبرهن أن

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

ولبرهنة الإتجاه المعاكس نفرض أن

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

فمن التعريف يكون لدينا أن لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < \delta$ بحيث أن

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

ومن تعريف مقياس العدد العقدي فإنه

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \ \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

وبما أن

$$|u(x,y) - w_0| = |Re\,(f(z) - w_0| \le |f(z) - w_0|$$
$$|v(x,y) - w_0| = |Im\,(f(z) - w_0| \le |f(z) - w_0|$$

ومن العلاقتين أعلاه نستنتج أن لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < \delta$ بحيث أن

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \implies |u(x,y)-u_0| < \varepsilon,$$
$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \implies |v(x,y)-v_0| < \varepsilon,$$

وهذا مكافئ للعلاقة (1) .

مثال: أوجد نهاية الدالة العقدية

$$f(z) = \frac{x}{x^4+y^4} + i\frac{2x^2-yx}{y^4+1}$$

عندما $z \to 1-i$

الحل. من الدالة $f(z)$ نستطيع أن نلاحظ أن

$$u(x,y) = \frac{x}{x^4+y^4}\ , v(x,y) = \frac{2x^2-yx}{y^4+1}$$

لذلك

$$\left.\begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z_0 = 1-i$$

والآن يكون

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x}{x^4+y^4} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2-yx}{y^4+1} = \frac{1}{2}.$$

إذن يكون $u_0 = \frac{1}{2}$, $v_0 = \frac{1}{2}$ وبالتالي حسب النظرية

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$$
$$\lim_{z\to 1+i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$