جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضره : العاشرة)

نظرية. لتكن $f'(z_0)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ موجودة عند النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ فإن المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u موجودة عند النقطة (x_0, y_0) وتحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$u_x = v_y \ , u_y = -v_x$$

والدالة $f'(z_0)$ يمكن كتابتها بالصورة

$$f'(z_0) = u_x + iv_x$$

مثال : لتكن $f(z) = z^4$ ، إثبت انها تحقق معادلتي كوشي-ريمان .

الحل . نعيد كتابة الدالة القابلة للإشتقاق $f(z)$ بدلالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ لذلك يكون لدينا

$$f(z) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4i(x^3y - xy^3)$$

إذن

$$v(x,y) = 4(x^3y - xy^3), \qquad u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

الآن نجد كل من $v_y\ , v_x\ , u_y\ , u_x$

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2\ , \qquad v_x = 4(3x^2y - y^3)$$
$$u_y = 4y^3 - 12x^2y, \qquad v_y = 4(x^3 - 3xy^2)$$

نلاحظ أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة حيث أن

$$u_x = v_y$$
$$u_y = v_x$$

الآن نعطي الشرط الكافي لكي تكون الدالة قابلة للإشتقاق من خلال النظرية الاتية حيث أن الدالة التي تحقق كوشي-ريمان ليس بالضرورة أن تكون قابلة للإشتقاق.

نظرية . لتكن الدالة $f(z)$ معرفة كالآتي:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

خلال جوار النقطة $z_0 = (x_0, y_0)$ ونفرض أن

أ. المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u موجودة عند كل نقطة من نقاط الجوار.

ب. المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u أيضاً مستمرة عند (x_0, y_0) وتحقق معادلتي كوشي-ريمان

$$u_x = v_y\ , u_y = -v_x$$

عند (x_0, y_0)،

فإن الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند (x_0, y_0) وقيمة المشتقة عندئذٍ هي

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

البرهان . ليكن الشرطان الأول والثاني متحققان ولتكن $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ حيث $0 < |\Delta z| < \varepsilon$

بالإضافة

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
$$= \Delta u + i\,\Delta v$$

حيث

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$
$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

وعليه يكون لدينا

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$
$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y$$

حيث $\varepsilon_i \to 0 \quad (i = 1,2,3,4)$
عندما $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)$
بالتعويض عن قيم $\Delta v, \Delta u$ في المعادلة نحصل على

$$\Delta w = u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + i\left[v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y\right]$$

ومن معادلتي كوشي-ريمان حيث

$$u_x = v_y \,, u_y = -v_x$$

لذلك يكون $$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ولكن $|\Delta z| > |\Delta y| , |\Delta z| > |\Delta y|$ هذا يؤدي الى

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} \le 1, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta z} \le 1$$

ونستنتج أن

$$\left|(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|,$$
$$\left|(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4| \le |\varepsilon_2| + |\varepsilon_4|$$

وهذا يعني أن الطرف الأيمن لكلا المتغيرين يذهبان للصفر كما المتغير $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ يقترب من الصفر لذلك تكون الدالة $f'(z_0)$ موجودة.

مثال: اثبت ان الدالة $f(z) = e^{2xy}\,[cos(y^2 - x^2) + i\,sin(y^2 - x^2)]$ قابلة للإشتقاق عند كل نقاط z

الحل.

$$u(x,y) = e^{2xy}\,cos(y^2 - x^2) \;, \qquad v(x,y) = e^{2xy}\,sin(y^2 - x^2)$$
$$u_x = v_y = 2ye^{2xy}\cos(y^2 - x^2) + 2xe^{2xy}\sin(y^2 - x^2)$$
$$u_y = -v_x = 2xe^{2xy}\cos(y^2 - x^2) - 2ye^{2xy}\sin(y^2 - x^2)$$

نستنتج من ذلك أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة بالإضافة إلى v_y , v_x , u_y , u_x جميعها دوال مستمرة لكل قيم (x, y) إن
ولذلك تكون الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق ولحساب المشتقة نستطيع كتابة

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2e^{2xy}[y\cos(y^2 - x^2) + x\sin(y^2 - x^2)] + 2e^{2xy}[y\sin(y^2 - x^2) + x\cos(y^2 - x^2)]$$

مثال: الدالة $f(z) = x^2 + 2xy \; + i(y^2 + 2xy)$ قابلة للإشتقاق على النقاط التي تقع على المستقيم $x = -y$ فقط

الحل . لإثبات ذلك نلاحظ أن

$$u(x,y) = x^2 + 2xy \ , \qquad v(x,y) = y^2 + 2xy$$

وبحساب المشتقات الجزئية يكون لدينا

$$u_x(x,y) = 2x + 2y \ , \qquad v_y(x,y) = 2y + 2x$$
$$u_y(x,y) = 2x \ , \qquad v_x(x,y) = 2y$$

المشتقات الجزئية أعلاه مستمرة ومعادلتي كوشي-ريمان تكون متحققة فقط إذا كان $2x = -2y$ أي أن

$$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

وهذا مكافئ إلى أن $x + y = 0$ وعليه تكون كوشي-ريمان متحققة إذا كان $x = -y$ وبناءً على النظرية السابقة فإن f قابلة للإشتقاق فقط عند النقاط التي تقع على المستقيم $x = -y$

معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية

عند استخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) فإن الدالة $f(z)$ تكتب بالصورة الآتية

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

حيث v, u دوال حقيقية والنظرية الآتية توضح لنا كيفية كتابة معادلتي كوشي-ريمان بالشكل القطبي ، وبرهانها يترك كتمرين للطالب.

نظرية . $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ دالة مستمرة معرفة على جوار النقطة $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ فإذا كانت المشتقات لتكن
الجزئية u_x , u_y , v_x , v_y مستمرة عند النقطة (r_0,θ_0) ومعادلتي كوشي-ريمان

$$u_r(r_0,\theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0,\theta_0) \ , \qquad v_r(r_0,\theta_0) = \frac{-1}{r_0} u_\theta(r_0,\theta_0)$$

متحققة فإن الدالة f قابلة للإشتقاق عند z_0 ومشتقتها $f'(z_0)$ تكتب بإحدى الصيغ الآتية

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}[u_r + iv_r]$$

أو

$$f'(z_0) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0}[v_\theta - iu_\theta]$$

مثال : لتكن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ حيث $z \neq 0$ أكتب $f(z)$ بإستخدام معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية وإثبت أنها قابلة للإشتقاق لكل قيم z الغير صفرية.

الحل .

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$
$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (z \neq 0)$$

بما أن $$u(r,\theta)=\frac{\cos\theta}{r}\ ,\qquad v(r,\theta)=\frac{-i\sin\theta}{r}$$

الآن نكتب معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية كالآتي:

$$ru_r=-\frac{\cos\theta}{r}=v_\theta\ ,\quad u_\theta=\frac{-i\sin\theta}{r}=-rv_r$$

وبما أنها متحققة ، لذلك فالدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند $z\neq 0$ وبالإعتماد على النظرية السابقة نجد أن

$$f'(z)=-e^{i\theta}\frac{e^{-i\theta}}{r^2}=\frac{-1}{(re^{i\theta})^2}=-\frac{1}{z^2}.$$